Maths Complémentaires Terminale

Bernoulli & binomiale

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

L'INSTITUT

CORRECTION

1. a. Déterminons en justifiant la loi de la variable aléatoire X:

Soit l'expérience aléatoire consistant à **interroger 700 personnes**.

Soient les événements $A =$ " la personne interrogée accepte de répondre à la question ", et $\overline{A} =$ " la personne interrogée refuse de répondre à la question ".

On désigne par **X** le nombre de fois où l'événement **A** s'est réalisé au cours des 700 épreuves.

Cette expérience est un schéma de Bernoulli.

Nous sommes en présence de 700 épreuves aléatoires identiques et indépendantes, avec à chaque fois 2 issues possibles: A et $\overline{A}$.

La variable aléatoire discrète X représentant le nombre de réalisations de **A** suit donc **une loi binomiale** de paramètres: $n = 700$ **et** $p = 0,6$.

Et nous pouvons noter: $X \rightsquigarrow B\,(700\,;\,0,6)$.

1. b. Déterminons la meilleure approximation de $P\,(X \geqslant 400)$:

Ici, nous devons calculer: $\mathbf{P\,(X \geqslant 400)}$, avec $X \rightsquigarrow B\,(700\,;\,0,6)$.

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.

Pour tout entier k, $0 \leq k \leq n$, la probabilité d'obtenir k succès sur n épreuves indépendantes (ou avec remise) est:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1 - p)^{(n-k)}, \text{ avec: } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

D'où ici: $P(X \geq 400) = 1 - P(X \leq 399)$

$\Rightarrow$ $P(X \geq 400) \approx 0,9427$ (calculatrice).

D'où la meilleure approximation de $P(X \geq 400)$ est: 94%.

2. Déterminons le nombre de personnes demandées:

Cela revient à déterminer " n " tel que:

$$P(X \geq 400) > 0,9, \text{ avec } X \rightsquigarrow B(n; 0,6\%).$$

Grâce à la question précédente, nous savons déjà que:

$P(X \geq 400) \approx 0,9427$, quand $n = 700$.

Donc nous pouvons affirmer que: $n < 700$.

$P(X \geq 400) > 0,9 \iff 1 - P(X \leq 399) > 0,9$

$\iff P(X \leq 399) < 0,1$.

À l'aide d'une machine à calculer et avec $n = 694$, on trouve:

$$P(X \leq 399) \approx 0,0955.$$

Nous retiendrons donc: $n = 694$ personnes.

Ainsi l'institut doit interroger au minimum 694 personnes pour garantir, avec une probabilité supérieure à 0.9, que le nombre de personnes répondant au sondage soit supérieur ou égal à 400.