BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 1

AMÉRIQUE DU NORD
2023

LA PRODUCTION DE DÉCHETS

CORRECTION

PARTIE A

1. Recopions et complétons l'arbre pondéré :

D'après l'énoncé, nous avons :

- M = " le déchet est minéral et non dangereux ".
- $\overline{M}$ = " le déchet est minéral et dangereux ".

- N = " le déchet est non minéral et non dangereux ".
- $\overline{N}$ = " le déchet est non minéral et dangereux ".

- D = " le déchet est dangereux ".
- $\overline{D}$ = " le déchet n'est pas dangereux ".

- R = " le déchet est recyclable ".
- $\overline{R}$ = " le déchet n'est pas recyclable ".

- $P(M) = 69\%$
- $P(\overline{M}) = 1 - 69\% = 31\%$.

- $P(N) = 28\%$
- $P(\overline{N}) = 1 - 28\% = 72\%$.

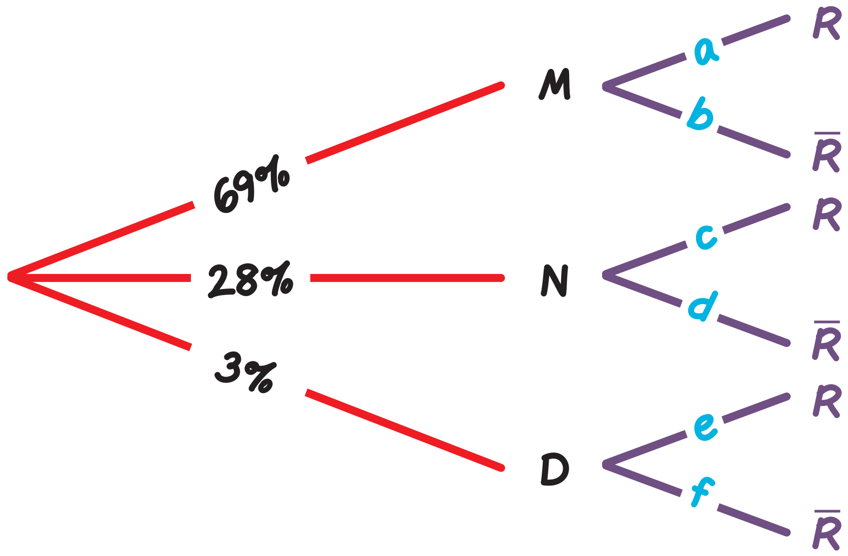
- $P(D) = 1 - 69\% - 28\% = 3\%$
- $P(\overline{D}) = 1 - 3\% = 97\%$.

- $P_M(R) = 73\%$
- $P_M(\overline{R}) = 1 - 73\% = 27\%$.

- $P_N(R) = 49\%$
- $P_N(\overline{R}) = 1 - 49\% = 51\%$.

- $P_D(R) = 35\%$
- $P_D(\overline{R}) = 1 - 35\% = 65\%$.

D'où l'arbre de probabilités complété est le suivant:



, avec:

- $a = 73\%$
- $b = 27\%$
- $c = 49\%$
- $d = 51\%$
- $e = 35\%$
- $f = 65\%$

.

2. Justifions que $P(D \cap R) = 0,0105$:

Calculer la probabilité que le déchet soit dangereux et recyclable revient à déterminer: $\mathbf{P(D \cap R)}$.

$\mathbf{P(D \cap R)} = P_D(R) \times P(D)$

$= 35\% \times 3\%$

$= \mathbf{0,0105}$.

Ainsi: $\mathbf{P(D \cap R) = 0,0105}$.

3. Déterminons $P(M \cap \overline{R})$ et interprétons le résultat:

$\mathbf{P(M \cap \overline{R})} = P_M(\overline{R}) \times P(M)$

$= 27\% \times 69\%$

$= \mathbf{0,1863}$.

Ainsi: $\mathbf{P(M \cap \overline{R}) = 0,1863}$.

Cela signifie que sur l'ensemble des déchets produits, 18, 63% d'entre eux sont des déchets qui sont minéraux et non recyclables.

4. Montrons que $P(R) = 0,6514$:

Ici, il s'agit de calculer: $P(R)$.

L'événement $R = (R \cap M) \cup (R \cap N) \cup (R \cap D)$.

D'après la formule des **probabilités totales**:

$$P(R) = P(R \cap M) + P(R \cap N) + P(R \cap D)$$

$$= P_M(R) \times P(M) + P_N(R) \times P(N) + P(R \cap D)$$

$$= 73\% \times 69\% + 49\% \times 28\% + 0,0105$$

$$= 0,6514.$$

Ainsi, nous avons bien: $P(R) = 0,6514$.

5. Déterminons $P_R(M)$:

Déterminer la probabilité que le déchet soit non minéral et non dangereux, sachant qu'il est recyclage revient à calculer: $P_R(M)$.

$$P_R(M) = \frac{P(R \cap N)}{P(R)}$$

$$= \frac{P_N(R) \times P(N)}{P(R)}$$

$$= \frac{49\% \times 28\%}{0,6514}$$

$\approx 0,2106.$

Ainsi, la probabilité que le déchet soit non minéral et non dangereux, sachant qu'il est recyclable est d'environ: 21,06%.

PARTIE B

1. a. Précisons les paramètres de la binomiale suivie par X:

Soit l'expérience aléatoire consistant à **prélever un échantillon de 20 déchets pris au hasard dans la production**: le stock est suffisamment important pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.

X est la variable aléatoire égale au nombre de déchets recyclables dans cet échantillon.

Nous savons que: **la probabilité qu'un déchet soit recyclable** $= 0,6514$.

Cette expérience est un schéma de Bernoulli.

Dans ces conditions, nous pouvons affirmer que: $X \rightsquigarrow B\,(20\,;\,0,6514)$.

Les paramètres sont donc: $n = 20$ et $p = 0,6514$.

1. b. Donnons la probabilité que l'échantillon contienne exactement 14 déchets recyclables:

Ici, il s'agit de calculer: $P\,(X = 14)$, avec $X \rightsquigarrow B\,(20\,;\,0,6514)$.

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.

Pour tout entier k, $0 \leqslant k \leqslant n$, la probabilité d'obtenir k succès sur n épreuves indépendantes (ou avec remise) est:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1 - p)^{(n-k)}, \text{ avec: } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

D'où ici: $P(X = 14) = \binom{20}{14} (0,6514)^{14} (1 - 0,6514)^6$

$\approx 0,1723$ (calculatrice).

Au total, la probabilité que l'échantillon contienne exactement 14 déchets recyclables est d'environ: 17,23%.

2. a. Donnons la probabilité p_n qu'aucun déchet de cet échantillon ne soit recyclable:

Ici, il s'agit de calculer: $P(X = 0)$, avec $X \leadsto B(n;\, 0,6514)$.

$$P(X = 0) = \binom{n}{0} (0,6514)^0 (1 - 0,6514)^n$$

$$= (0,3486)^n.$$

Ainsi: $p_n = (0,3486)^n$.

2. b. Déterminons la valeur de l'entier naturel " n " tel que $P(X \geqslant 1) \geqslant 0,9999$:

$P(X \geqslant 1) \geqslant 0,9999 \iff 1 - P(X < 1) \geqslant 0,9999$

$\iff 1 - P(X = 0) \geqslant 0,9999$

$$\Longleftrightarrow \quad 1 - (0,3486)^n \geq 0,9999$$

$$\Longleftrightarrow \quad n \times \ln(0,3486) \leq \ln(0,0001)$$

$$\Longleftrightarrow \quad n \geq \frac{\ln(0,0001)}{\ln(0,3486)}$$ cad $n \geq 9$ déchets car $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi, c'est à partir de $n = 9$ déchets que la probabilité qu'au moins un déchet soit recyclable est supérieure ou égale à 0, 9999.