BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 1

POLYNÉSIE
2023

SAUTER UNE HAIE

CORRECTION

PARTIE A

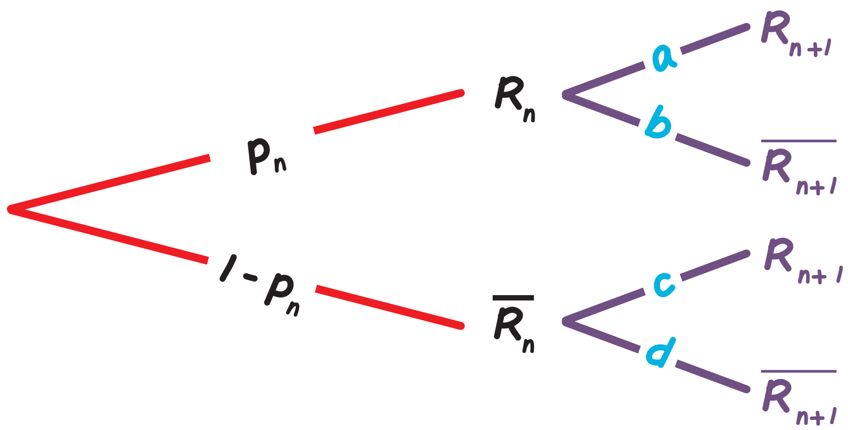
1. Recopions et complétons l'arbre pondéré:

D'après l'énoncé, nous avons:

- R_n = " il réussit à franchir la haie le n-ième jour ".
- $\overline{R_n}$ = " il ne réussit pas à franchir la haie le n-ième jour ".
- $P(R_n) = p_n$
- $P(\overline{R_n}) = 1 - p_n$.
- $P_{R_n}(R_{n+1}) = 90\%$
- $P_{R_n}(\overline{R_{n+1}}) = 1 - 90\% = 10\%$.
- $P_{\overline{R_n}}(R_{n+1}) = 1 - 70\% = 30\%$
- $P_{\overline{R_n}}(\overline{R_{n+1}}) = 70\%$.

• $P(R_0) = p_0 = 0,6$.

D'où l'arbre de probabilités complété est le suivant:



, avec:
- $a = 90\%$
- $b = 10\%$
- $c = 30\%$
- $d = 70\%$

2. Montrons que pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 0,6\,p_n + 0,3$:

Ici, il s'agit de calculer: $P(R_{n+1}) = p_{n+1}$.

L'événement $R_{n+1} = (R_{n+1} \cap R_n) \cup (R_{n+1} \cap \overline{R_n})$.

D'après la formule des **probabilités totales**:

$$P(R_{n+1}) = P(R_{n+1} \cap R_n) + P(R_{n+1} \cap \overline{R_n})$$

$$= 0,9 \times p_n + 0,3 \times (1 - p_n)$$

$$= 0,6\,p_n + 0,3.$$

Ainsi, pour tout entier naturel " n ", nous avons bien: $p_{n+1} = 0,6\,p_n + 0,3$.

3. a. Montrons que la suite (U_n) est géométrique dont on précisera la raison et le premier terme:

Ici: • $p_{n+1} = 0,6\,p_n + 0,3$

• $U_n = p_n - 0,75$.

$U_n = p_n - 0,75 \iff U_{n+1} = p_{n+1} - 0,75$

$\iff U_{n+1} = (0,6p_n + 0,3) - 0,75 \quad (1)$.

Or: $U_0 = p_0 - 0,75 \Rightarrow \mathbf{U_0 = 0,6 - 0,75 = -0,15}$ et $\mathbf{p_n = U_n + 0,75}$.

Ainsi: $(1) \iff U_{n+1} = (0,6\,[\,U_n + 0,75\,] + 0,3) - 0,75$

$\iff \mathbf{U_{n+1} = 0,6\,U_n}$.

(U_n) est donc une suite géométrique avec: • $\mathbf{U_0 = -0,15}$

• $\mathbf{q = 0,6}$.

3. b. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = 0,75 - 0,15 \times (0,6)^n$:

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $p_n = 0,75 - 0,15 \times (0,6)^n$ ".

Initialisation: $p_0 = 0,75 - 0,15 \times (0,6)^0$

$= 0,75 - 0,15$

$= \mathbf{0,6}$.

Or d'après l'énoncé: $\mathbf{p_0 = 0,6}$.

Donc vrai au rang " 0 ".

Hérédité: Supposons que pour un certain entier naturel n,
$p_n = 0,75 - 0,15 \times (0,6)^n$ et montrons qu'alors nous avons

$\mathbf{p_{n+1} = 0,75 - 0,15 \times (0,6)^{n+1}}$.

Supposons: $p_n = 0,75 - 0,15 \times (0,6)^n$, pour un entier naturel n fixé.
(1)

$(1) \Rightarrow 0,6 \times p_n = 0,6 \times 0,75 - 0,6 \times 0,15 \times (0,6)^n$

$\Rightarrow 0,6\, p_n = 0,45 - 0,15 \times (0,6)^{n+1}$

$\Rightarrow 0,6\, p_n + 0,3 = 0,45 + 0,3 - 0,15 \times (0,6)^{n+1}$

$\Rightarrow p_{n+1} = 0,75 - 0,15 \times (0,6)^{n+1}$.

Conclusion: Pour tout entier naturel n, $p_n = 0,75 - 0,15 \times (0,6)^n$.

3. c. Déduisons-en que la suite (p_n) est convergente et déterminons sa limite " ℓ ":

Pour répondre à cette question, nous allons calculer la limite de p_n en $+\infty$.

$$\lim_{n \to +\infty} p_n = \lim_{n \to +\infty} 0,75 - 0,15 \times (0,6)^n$$

$$= 0,75 \text{ car } \lim_{n \to +\infty} (0,6)^n = 0, \text{ car } 0,6 \in]0;1[.$$

Ainsi, nous avons: $\lim_{n \to +\infty} p_n = 0,75$ et par conséquent nous pouvons affirmer que la suite (p_n) est convergente.

3. d. Interprétons la valeur de " ℓ ":

Ici: $\ell = 0,75$.

Cela signifie qu'au bout d'un certain temps, (nombre de jours très important), l'athlète franchira la haie dans 75% des cas.

PARTIE B

1. Précisons la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X:

Soient les événements **A** = " l'athlète franchit la haie ", et $\overline{A}$ = " l'athlète ne franchit pas la haie ".

On désigne par **X** la variable aléatoire qui donne le nombre de haies franchies par l'athlète à l'issue d'un 400 mètres haies qui comporte 10 haies.

Cette expérience est un schéma de Bernoulli.

Nous sommes en présence de 10 épreuves aléatoires identiques et indépendantes, avec à chaque fois 2 issues possibles: **A** et $\overline{A}$.

La variable aléatoire discrète **X** représentant le nombre de réalisations de **A** suit donc **une loi binomiale** de paramètres: $n = 10$ et $p = 75\%$.

Et nous pouvons noter: $X \rightsquigarrow B\,(10\,;\,75\%)$.

2. Déterminons la probabilité que l'athlète franchisse les 10 haies:

Ici, il s'agit de calculer: $P\,(X = 10)$, avec $X \rightsquigarrow B\,(10\,;\,75\%)$.

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.

Pour tout entier k, $0 \leqslant k \leqslant n$, la probabilité d'obtenir k succès sur n épreuves indépendantes (ou avec remise) est:

$$P\,(X = k) = \binom{n}{k} p^{k} \cdot (1 - p)^{(n-k)}, \text{ avec: } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

D'où: $P(X = 10) = \binom{10}{10} (75\%)^{10} (1 - 75\%)^{0}$

$= (0,75)^{10}$

$\approx 0,056.$

La probabilité que l'athlète franchisse les 10 haies est d'environ: 5,6%.

3. Calculons $P(X \geqslant 9)$:

$P(X \geqslant 9) = 1 - P(X < 9)$

$= 1 - P(X \leqslant 8)$

$\approx 0,244$ (calculatrice).

Ainsi: $P(X \geqslant 9) \approx 24,4\%$.