

www.freemaths.fr

# BACCALAURÉAT MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ  
EXERCICE 2



CENTRES ÉTRANGERS 2

2023

# PRÉSERVER LA NATURE

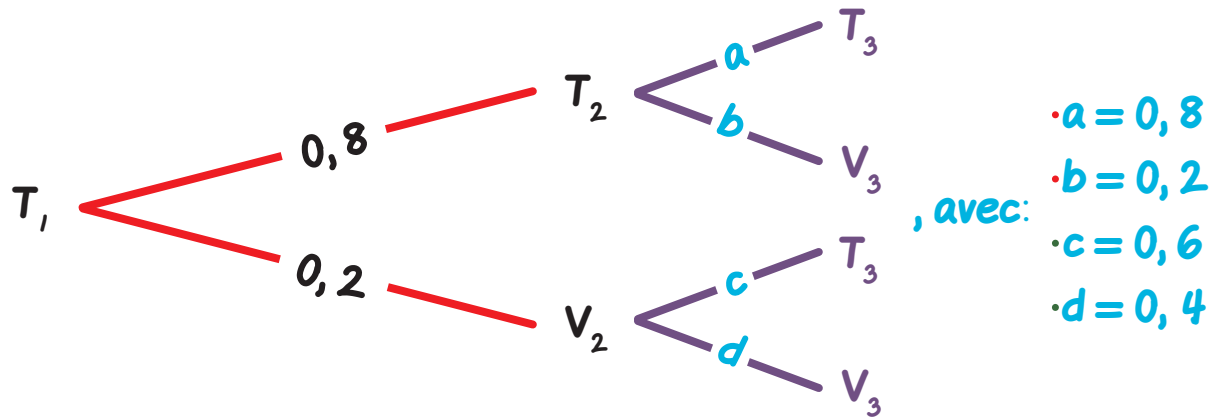
## CORRECTION

1. Recopions et complétons l'arbre pondéré:

D'après l'énoncé, nous avons:

- $T_n =$  " il utilise les transports en commun le  $n$ -ième jour "
- $V_n =$  " il utilise son vélo le  $n$ -ième jour "
- $P(T_n) = P_n$
- $P(V_n) = 1 - P_n$
- $P_{T_n}(T_{n+1}) = 0,8$
- $P_{T_n}(V_{n+1}) = 1 - 0,8 = 0,2$
- $P_{V_n}(T_{n+1}) = 1 - 0,4 = 0,6$
- $P_{V_n}(V_{n+1}) = 0,4$
- $P(T_1) = P_1 = 1$ .

D'où l'arbre de probabilités complété et le suivant:



## 2. Calculons $P_3$ :

Compte tenu des données:  $P_3 = P(T_3) = P(T_3 \cap T_2) + P(T_3 \cap V_2)$

(probabilités totales)

$$= 0,8 \times 0,8 + 0,6 \times 0,2$$

$$= 0,76.$$

Ainsi:  $P_3 = 76\%$ .

## 3. Calculons la probabilité que M. Durand ait pris les transports en commun la veille sachant qu'il utilise son vélo aujourd'hui:

Ici, il s'agit de calculer:  $P_{V_3}(T_2)$ .

$$\begin{aligned} P_{V_3}(T_2) &= \frac{P(T_2 \cap V_3)}{P(V_3)} \\ &= \frac{P_{T_2}(V_3) \times P(T_2)}{P(V_3)} \end{aligned}$$

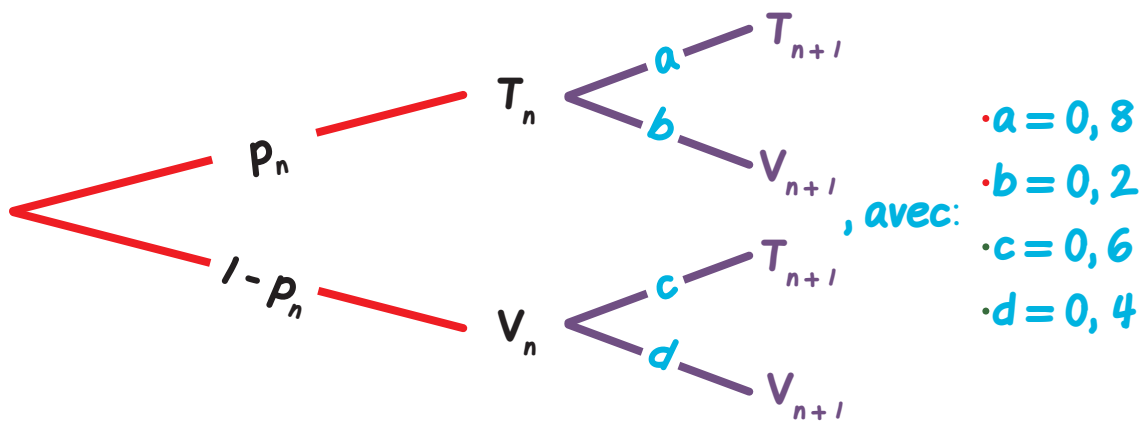
$$= \frac{0,2 \times 0,8}{1 - P_3}$$

$$= \frac{2}{3}$$

Ainsi, la probabilité que M. Durand ait pris les transports en commun la veille sachant qu'il utilise son vélo aujourd'hui est de:  $\frac{2}{3}$ .

#### 4. Recopions et complétons l'arbre pondéré:

L'arbre pondéré complété est le suivant:



#### 5. Montrons que pour tout entier naturel " n " non nul, $P_{n+1} = 0,2 P_n + 0,6$ :

Ici, il s'agit de calculer:  $P(T_{n+1}) = P_{n+1}$ .

L'événement  $T_{n+1} = (T_{n+1} \cap T_n) \cup (T_{n+1} \cap V_n)$ .

D'après la formule des probabilités totales:

$$P(T_{n+1}) = P(T_{n+1} \cap T_n) + P(T_{n+1} \cap V_n)$$

$$= 0,8 \times P_n + 0,6(1 - P_n)$$

$$= 0,2 P_n + 0,6.$$

Ainsi, pour tout entier naturel  $n$  non nul, nous avons bien:

$$P_{n+1} = 0,2 P_n + 0,6.$$

6. Montrons par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $P_n = 0,75 + 0,25 \times (0,2)^{n-1}$ :

Nous allons montrer par récurrence que:

" Pour tout entier naturel non nul  $n$ :  $P_n = 0,75 + 0,25 \times (0,2)^{n-1}$ ."

Initialisation:  $P_1 = 0,75 + 0,25 \times (0,2)^{1-1}$

$$= 0,75 + 0,25$$

$$= 1.$$

Or, d'après l'énoncé:  $P_1 = 1$ .

Donc vrai au rang  $1$ .

Hérédité: Supposons que pour un certain entier naturel non nul  $n$ ,  
 $P_n = 0,75 + 0,25 \times (0,2)^{n-1}$  et montrons qu'alors nous avons

$$P_{n+1} = 0,75 + 0,25 \times (0,2)^n.$$

Supposons:  $P_n = 0,75 + 0,25 \times (0,2)^{n-1}$ , pour un entier naturel non nul  $n$  fixé.  
 (1)

$$(1) \Rightarrow 0,2 P_n = 0,2 \times 0,75 + 0,25 \times (0,2)^{n-1} \times 0,2$$

$$\Rightarrow 0,2 P_n + 0,6 = 0,2 \times 0,75 + 0,6 + 0,25 \times (0,2)^n$$

$$\Rightarrow 0,2 P_n + 0,6 = 0,75 + 0,25 \times (0,2)^n$$

$$\Rightarrow P_{n+1} = 0,75 + 0,25 \times (0,2)^n.$$

Conclusion: Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $P_n = 0,75 + 0,25 \times (0,2)^{n-1}$ .

7. Déterminons la limite de la suite  $(P_n)$  et interprétons le résultat:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,75 + 0,25 \times (0,2)^{n-1} \\ &= 0,75 \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} (0,2)^{n-1} = 0, \text{ car } 0,2 \in ]0; 1[. \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = 0,75$ .

Cela signifie, qu'au bout d'un certain nombre de jours, M. Durand prendra les transports en commun 3 jours sur 4.