www.freemaths.fr

BACCALAURÉAT MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 2

CENTRES ÉTRANGERS 1

2023

LA TROTTINETTE

CORRECTION

PARTIE A

1. Donnons p_1 et montrons que $p_2 = 0,85$:

D'après l'énoncé:

- $p_0 = 1$,
- en bon état un lundi, la probabilité qu'elle soit encore en bon état le lundi suivant $= 0,9$,
- $B_0 =$ " la trottinette est en bon état n semaines après sa mise en service ",
- $p_n = P(B_n)$.

Dans ces conditions, nous avons:

- $p_1 = P(B_1) = P(B_0) \times P_{B_0}(B_1)$.

$= 1 \times 0,9$

$= 0,9$.

- $p_2 = P(B_2) = P(B_2 \cap B_1) + P(B_2 \cap \overline{B_1})$

$= 0,9 \times 0,9 + 0,4 \times 0,1$

$= 0,85$.

2. Recopions et complétons l'arbre pondéré:

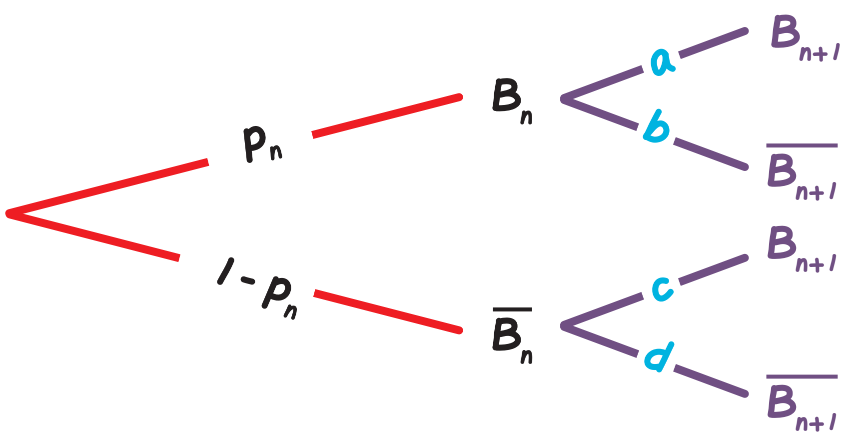
D'après l'énoncé, nous avons:

- B_n = " la trottinette est en bon état n semaines après sa mise en service ".
- $\overline{B_n}$ = " la trottinette n'est pas en bon état n semaines après sa mise en service ".

- $P(B_n) = p_n$
- $P(\overline{B_n}) = 1 - p_n$.

- $P_{B_n}(B_{n+1}) = 0,9$
- $P_{B_n}(\overline{B_{n+1}}) = 0,1$.
- $P_{\overline{B_n}}(B_{n+1}) = 0,4$
- $P_{\overline{B_n}}(\overline{B_{n+1}}) = 0,6$.

D'où l'arbre de probabilités complété est le suivant:



, avec:

- $a = 0,9$
- $b = 0,1$
- $c = 0,4$
- $d = 0,6$.

3. Déduisons-en que pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 0,5\ p_n + 0,4$:

Ici, il s'agit de calculer: $P(B_{n+1}) = p_{n+1}$.

L'événement $B_{n+1} = (B_{n+1} \cap B_n) \cup (B_{n+1} \cap \overline{B_n})$.

D'après la formule des **probabilités totales**:

$$P(B_{n+1}) = P(B_{n+1} \cap B_n) + P(B_{n+1} \cap \overline{B_n})$$

$$= 0,9 \times p_n + 0,4 \times (1 - p_n)$$

$$= 0,5\ p_n + 0,4.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, nous avons bien: $p_{n+1} = 0,5\ p_n + 0,4$.

4. a. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $p_n \geqslant 0\ 8$:

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel: $p_n \geqslant 0,8$ ".

Initialisation:
- $p_0 = 1$
- $p_1 = 0,9$
- $p_2 = 0,85$.

Donc vrai aux rangs " 0 ", " 1 " et " 2 ".

Hérédité: Supposons que pour un certain entier naturel n, $p_n \geqslant 0,8$ et montrons qu'alors $p_{n+1} \geqslant 0,8$.

Supposons: $p_n \geqslant 0,8$, pour un entier naturel n fixé.
(1)

$(1) \Rightarrow 0,5\, p_n \geqslant 0,5 \times 0,8$

$\Rightarrow 0,5\, p_n + 0,4 \geqslant 0,4 + 0,4$

$\Rightarrow p_{n+1} \geqslant 0,8.$

Conclusion: Pour tout entier naturel n, $p_n \geqslant 0,8$.

4. b. Quelle communication l'entreprise peut-elle envisager pour valoriser la fiabilité du parc ?

Communiqué de l'entreprise: " au moins 80% de notre parc de trottinettes est toujours en bon état ! "

5. a. Montrons que (U_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison:

Ici:
- $p_{n+1} = 0,5\, p_n + 0,4$
- $U_n = p_n - 0,8.$

$U_n = p_n - 0,8 \iff U_{n+1} = p_{n+1} - 0,8$

$\iff U_{n+1} = (0,5 p_n + 0,4) - 0,8 \quad (1).$

Or: $U_0 = p_0 - 0,8 \Rightarrow U_0 = 1 - 0,8 = 0,2$ et $p_n = U_n + 0,8.$

Ainsi: $(1) \iff U_{n+1} = (0,5\,[\,U_n + 0,8\,] + 0,4) - 0,8$

$\iff U_{n+1} = 0,5\, U_n.$

(U_n) est donc bien une suite géométrique avec:
- $U_0 = 0,2$
- $q = 0,5.$

5. b. Déduisons-en l'expression de U_n et de p_n en fonction de n:

Pour tout entier naturel n, d'après le cours: $U_n = U_0 \times (q)^n$.

D'où ici:
- $U_n = 0,2 \times (0,5)^n$
- $p_n = U_n + 0,8 = 0,2 \times (0,5)^n + 0,8$.

5. c. Déduisons-en la limite de la suite (p_n):

$$\lim_{n \to +\infty} p_n = \lim_{n \to +\infty} 0,2 \times (0,5)^n + 0,8$$

$$= 0,8 \quad \text{car} \quad \lim_{n \to +\infty} (0,5)^n = 0, \quad \text{car} \quad 0,5 \in]0;1[.$$

Ainsi nous avons: $\lim_{n \to +\infty} p_n = 0,8$.

PARTIE B

1. Justifions que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres:

Soit l'expérience aléatoire consistant à **prélever au hasard un lot de 15 trottinettes**: le nombre de trottinettes étant très important, ce prélèvement est assimilé à un tirage avec remise.

Soient les événements A = " la trottinette est en bon état ", et $\overline{A}$ = " la trottinette est en mauvais état ".

On désigne par **X** la variable aléatoire qui, à un lot de 15 trottinettes associe le nombre de trottinettes en bon état.

Cette expérience est un schéma de Bernoulli.

Nous sommes en présence de 15 épreuves aléatoires identiques et indépendantes, avec à chaque fois 2 issues possibles: A et $\overline{A}$.

La variable aléatoire discrète X représentant le nombre de réalisations de A suit donc **une loi binomiale** de paramètres: $n = 15$ et $p = 0,8$.

Et nous pouvons noter: $X \rightsquigarrow B(15; 0,8)$.

2. Calculons la probabilité que les 15 trottinettes soient en bon état:

Il s'agit de calculer ici: $P(X = 15)$, avec $X \rightsquigarrow B(15; 0,8)$.

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.

Pour tout entier k, $0 \leqslant k \leqslant n$, la probabilité d'obtenir k succès sur n épreuves indépendantes (ou avec remise) est:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1 - p)^{(n-k)}, \text{ avec: } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

D'où ici: $P(X = 15) = \binom{15}{15} (0,8)^{15} (1 - 0,8)^0$

$$= (0,8)^{15}$$

$$\approx 0,0352.$$

Au total, la probabilité que les 15 trottinettes soient en bon état est d'environ: $0,0352$ cad $3,52\%$.

3. Calculons la probabilité qu'au moins 10 trottinettes soient en bon état dans un lot de 15:

Pour répondre à cette question, nous devons calculer: $P(X \geq 10)$.

Or: $P(X \geq 10) = 1 - P(X < 10)$

$= 1 - P(X \leq 9)$

$\approx 0,9389$.

Ainsi, il y a 93, 89% de chance pour qu'au moins 10 trottinettes soient en bon état dans un lot de 15.

4. Interprétons $E(X) = 12$:

Cela signifie qu'en moyenne, sur un lot de 15 trottinettes, 12 d'entre elles seront en bon état.