BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 4

NOUVELLE CALÉDONIE
2022

BIT : " 0 " OU " 1 "

CORRECTION

PRÉALABLE:

D'après l'énoncée nous avons:

- E_0 = " le bit envoyé est un 0 ".
- E_1 = " le bit envoyé est un 1 ".

- R_0 = " le bit reçu est un 0 ".
- R_1 = " le bit reçu est un 1 ".

- $P(E_0) = 0,4$
- $P(E_1) = 1 - 0,4 = 0,6$.

- $P_{E_0}(R_0) = 1 - 0,01 = 0,99$
- $P_{E_0}(R_1) = 0,01$.

- $P_{E_1}(R_0) = 0,02$
- $P_{E_1}(R_1) = 1 - 0,02 = 0,98$.

1. La probabilité que le bit envoyé soit un 0 et que le bit reçu soit un 0 ?

Cela revient à déterminer : $P(E_0 \cap R_0)$.

Comme indiqué dans le PRÉALABLE :
- $P_{E_0}(R_0) = 0,99$
- $P(E_0) = 0,4$.

Or : $P(E_0 \cap R_0) = P_{E_0}(R_0) \times P(E_0)$

$= 0,99 \times 0,4$

$= 0,396$.

b

Ainsi, il y a 39,6% de chance que le bit envoyé soit un 0 et que le bit reçu soit un 0.

2. La probabilité $P(R_0) = \dots$?

Soit R_0, l'événement : " le bit reçu est un 0 ".

$R_0 = (R_0 \cap E_0) \cup (R_0 \cap E_1)$.

Dans ces conditions, d'après la formule des **probabilités totales** :

$P(R_0) = P(R_0 \cap E_0) + P(R_0 \cap E_1)$

$= P(E_0 \cap R_0) + P_{E_1}(R_0) \times P(E_1)$

$= 0,396 + 0,02 \times 0,6$

$= 0,408$.

c

Ainsi, la probabilité que le bit reçu soit un 0 est de : 0,408 cad 40,8%.

3. Une valeur approchée de $P_{R_1}(E_0)$ est égale à ... ?

Ici, il s'agit de calculer: $P_{R_1}(E_0)$.

$$P_{R_1}(E_0) = \frac{P(R_1 \cap E_0)}{P(R_1)}$$

$$= \frac{P(E_0 \cap R_1)}{1 - P(R_0)}$$

$$= \frac{P_{E_0}(R_1) \times P(E_0)}{1 - P(R_0)}$$

C

$$= \frac{0,01 \times 0,4}{1 - 0,408}$$

$$= 0,0067 \approx 0,007, \text{ au millième.}$$

Ainsi, une valeur approchée au millième de $P_{R_1}(E_0)$ est:

0,007 cad 0,7%.

4. La probabilité de l'événement " il y a une erreur de transmission " est ... ?

Soit E, l'événement: " il y a une erreur de transmission ".

$E = (E_0 \cap R_1) \cup (E_1 \cap R_0)$.

Dans ces conditions, d'après la formule des **probabilités totales**:

$$P(E) = P(E_0 \cap R_1) + P(E_1 \cap R_0)$$

b

$$= P_{E_0}(R_1) \times P(E_0) + P_{E_1}(R_0) \times P(E_1)$$

$= 0,01 \times 0,4 + 0,02 \times 0,6$

$= 0,016.$

Ainsi, la probabilité qu'il y ait une erreur de transmission est de:

0,016 cad 1,6%.

5. Calculons la probabilité qu'exactement 7 octets soient transmis sans erreur:

Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'octets transmis sans erreur.

L'expérience consiste à **transmettre successivement 10 octets de façon indépendante**.

Cette expérience est un schéma de Bernoulli.

D'où, X suit **une loi binomiale** de paramètres: $n = 10$ et $p = 0,88$.

Et nous pouvons noter: $X \rightsquigarrow B(10; 0,88)$.

Il s'agit de calculer ici: $P(X = 7)$, avec $X \rightsquigarrow B(10; 0,88)$.

d

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.

Pour tout entier k, $0 \leqslant k \leqslant n$, la probabilité d'obtenir k succès sur n épreuves indépendantes (ou avec remise) est:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k . (1 - p)^{(n-k)}, \text{ avec: } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

D'où ici: $P(X=7) = \binom{10}{7} (0,88)^7 (1-0,88)^3$

$\approx$ **0, 085** (**calculatrice**).

Au total, la probabilité qu'exactement 7 octets soient transmis est d'environ: 8, 5%.

6. Calculons la probabilité qu'au moins 1 octet soit transmis sans erreur:

Pour répondre à cette question, nous devons calculer: $P(X \geq 1)$.

Or: $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1)$

$= 1 - P(X = 0)$

$= 1 - \binom{10}{0} (0,88)^0 (1-0,88)^{10}$

a

$= 1 - (0,12)^{10}$.

Ainsi, la probabilité qu'au moins 1 octet soit transmis sans erreur est de:

$$1 - (0,12)^{10}.$$

7. Déterminons N_0:

Répondre à cette question revient à déterminer l'entier naturel " **N** " tel que:

$$P(X = N) \geq 0,1, \text{ avec } X \rightsquigarrow B(N; 0,88).$$

$P(X = N) \geq 0,1 \iff \binom{N}{N} (0,88)^N (1-0,88)^0 \geq 0,1$

$$\iff (0,88)^N \geq 0,1$$

b

$$\iff N \ln(0,88) \geq \ln(0,1)$$

$$\iff N \leq \frac{\ln(0,1)}{\ln(0,88)} \quad \text{cad} \quad N \leq 18 \text{ octets.}$$

Ainsi, la plus grande valeur demandée de N est : $N_0 = 18$.