BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 1

AMÉRIQUE DU SUD
2022

L'INDUSTRIE AUTOMOBILE

CORRECTION

PARTIE A

1. Représentons la situation par un arbre pondéré:

D'après l'énoncé, nous avons:

- C_1 = " il provient de la chaîne 1 ".
- C_2 = " il provient de la chaîne 2 ".
- C_3 = " il provient de la chaîne 3 ".

- D = " le composant est défectueux ".
- $\overline{D}$ = " le composant est parfait ".

- $P(C_1) = 50\%$.
- $P(C_2) = 30\%$.
- $P(C_3) = 20\%$.

- $P_{C_1}(D) = 1\%$

- $P_{C_1}(\overline{D}) = 1 - 1\% = 99\%.$

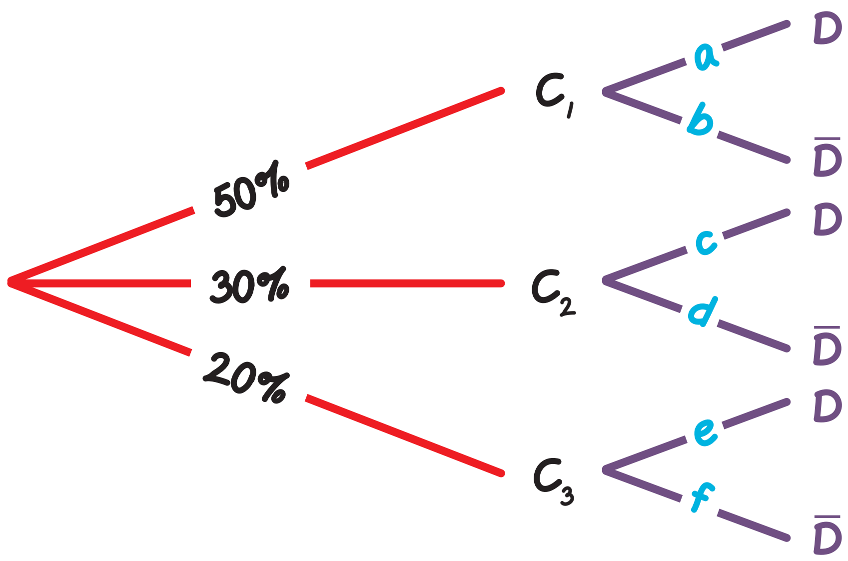
- $P_{C_2}(D) = 0,5\%$

- $P_{C_2}(\overline{D}) = 1 - 0,5\% = 99,5\%.$

- $P_{C_3}(D) = 4\%$

- $P_{C_3}(\overline{D}) = 1 - 4\% = 96\%.$

D'où l'arbre de probabilités suivant:



, avec:

- $a = 1\%$
- $b = 99\%$
- $c = 0,5\%$
- $d = 99,5\%$
- $e = 4\%$
- $f = 96\%$

2. Calculons la probabilité que le composant prélevé provienne de la chaîne n° 3 et soit défectueux:

Calculer la probabilité que le composant prélevé provienne de la chaîne n° 3 et soit défectueux revient à déterminer: $P(C_3 \cap D).$

$$P(C_3 \cap D) = P_{C_3}(D) \times P(C_3)$$

$$= 4\% \times 20\%$$

$= 0,008.$

La probabilité demandée est donc égale à : $0,008$ cad $0,8\%$.

3. Montrons que $P(D) = 0,0145$:

Soit D, l'événement : " le composant est défectueux ".

$D = (D \cap C_1) \cup (D \cap C_2) \cup (D \cap C_3).$

Dans ces conditions, d'après la formule des **probabilités totales** :

$$\mathbf{P(D)} = P(D \cap C_1) + P(D \cap C_2) + P(D \cap C_3)$$

$$= P_{C_1}(D) \times P(C_1) + P_{C_2}(D) \times P(C_2) + P_{C_3}(D) \times P(C_3)$$

$$= 1\% \times 50\% + 0,5\% \times 30\% + 4\% \times 20\%$$

$$= 0,0145.$$

Ainsi, la probabilité que le composant soit défectueux est de :

$0,0145$ cad $1,45\%$.

4. Calculons la probabilité qu'un composant défectueux provienne de la chaîne n° 3 :

Répondre à la question revient à calculer : $P_D(C_3)$.

Or : $$P_D(C_3) = \frac{P(D \cap C_3)}{P(D)}$$

$$= \frac{P_{C_3}(D) \times P(C_3)}{P(D)}$$

$$= \frac{4\% \times 20\%}{1,45\%}$$

$$\approx 55,17\%.$$

Il y a donc environ 55, 17% de chance pour qu'un composant défectueux provienne de la chaîne n° 3.

PARTIE B

1. a. Calculons la probabilité pour qu'un lot possède exactement trois composants défectueux:

D'après l'énoncé:

- X est la variable aléatoire qui, à chaque lot de n unités, associe le nombre de composants défectueux de ce lot ;
- X suit donc une loi binomiale ;
- $X \rightsquigarrow B\,(n = 20\,;\, p = 0,0145)$.

Il s'agit de calculer ici: $P\,(X = 3)$, avec $X \rightsquigarrow B\,(20\,;\,0,0145)$.

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.

Pour tout entier k, $0 \leqslant k \leqslant n$, la probabilité d'obtenir k succès sur n épreuves indépendantes (ou avec remise) est:

$$P\,(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1 - p)^{(n-k)}, \text{ avec: } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

D'où ici: $P(X=3)=\binom{20}{3}(0,0145)^3(1-0,0145)^{17}$

$\approx 0,0027$ (calculatrice).

Au total, la probabilité pour qu'un lot possède exactement trois composant défectueux est d'environ: 0,27%.

1. b. b$_1$. Calculons la probabilité pour qu'un lot ne possède aucun composant défectueux:

La probabilité pour qu'un lot ne possède aucun composant défectueux correspond à: $P(X=0)$, avec $X \leadsto B(20; 0,0145)$.

$$P(X=0)=\binom{20}{0}(0,0145)^0(1-0,0145)^{20}$$

$$=(1-0,0145)^{20}$$

$$\approx 0,7467.$$

Ainsi, il y a 74,67% de chance pour qu'un lot ne possède aucun composant défectueux.

1. b. b$_2$. Déduisons-en la probabilité qu'un lot possède au moins un composant défectueux:

Déduire la probabilité qu'un lot possède au moins un composant défectueux revient à calculer: $P(X \geqslant 1)$, avec $X \leadsto B(20; 0,0145)$.

Or: $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X < 1)$

$$= 1 - P(X = 0)$$

$= 1 - 0,7467$

$\approx 0,2533.$

Ainsi, la probabilité qu'un lot possède au moins un composant défectueux est d'environ: 25,33%.

2. Le directeur de l'entreprise a-t-il raison ?

Pour répondre à cette question, nous allons calculer:

$P(X = 0)$, avec $X \leadsto B(11\,;\,0,0145)$.

$$P(X = 0) = \binom{11}{0}(0,0145)^0(1 - 0,0145)^{11}$$

$$= (1 - 0,0145)^{11}$$

$$\approx 0,8515.$$

Comme $0,8515 > 0,85$: OUI, le directeur de l'entreprise a raison.

PARTIE C

Calculons le coût moyen de fabrication d'un composant:

D'après l'énoncé:
- coûts de fabrication de la chaîne 1 = 15 euros
- coûts de fabrication de la chaîne 2 = 12 euros
- coûts de fabrication de la chaîne 3 = 9 euros.

Dans ces conditions, le coût moyen de fabrication d'un composant est:

$$CM = 50\% \times 15 + 30\% \times 12 + 20\% \times 9$$

$$= 12,9 \text{ euros.}$$