BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 1

AMÉRIQUE DU SUD
2022

LE SYSTÈME D'ALARME

CORRECTION

PARTIE A

1. Représentons la situation par un arbre pondéré :

D'après l'énoncé, nous avons :

- A = " l'alarme s'active ".
- $\overline{A}$ = " l'alarme ne s'active pas ".

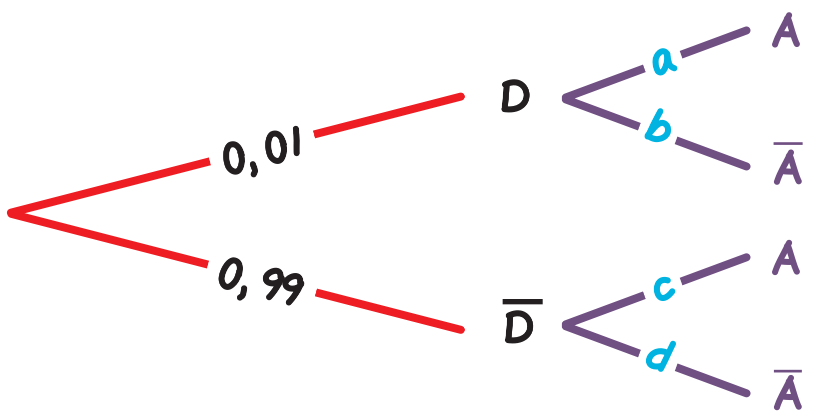
- D = " un danger se présente ".
- $\overline{D}$ = " no danger ".

- $P(A) = 0,01465$
- $P(\overline{A}) = 1 - 0,01465 = 0,98535$.

- $P(D) = 0,01$
- $P(\overline{D}) = 1 - 0,01 = 0,99$.

- $P_D(A) = 0,97$
- $P_D(\overline{A}) = 1 - 0,97 = 0,03.$
- $P_{\overline{D}}(A) = x$
- $P_{\overline{D}}(\overline{A}) = y.$

D'où l'arbre de probabilités suivant:



, avec:
- $a = 0,97$
- $b = 0,03$
- $c = x$
- $d = y$.

2. a. Calculons la probabilité qu'un danger se présente et que l'alarme s'active:

Calculer la probabilité qu'un danger se présente et que l'alarme s'active revient à déterminer: $P(D \cap A)$.

$$P(D \cap A) = P_D(A) \times P(D)$$

$$= 0,97 \times 0,01$$

$$= 0,0097.$$

Ainsi, la probabilité qu'un danger se présente et que l'alarme s'active est de: $0,0097$ cad $0,97\%$.

2. b. Déduisons-en la probabilité qu'un danger se présente sachant que l'alarme s'active:

Répondre à la question revient à calculer: $P_A(D)$.

Or: $P_A(D) = \dfrac{P(D \cap A)}{P(A)}$

$= \dfrac{0,0097}{0,01465}$

$= 0,6621$.

Ainsi, la probabilité qu'un danger se présente sachant que l'alarme s'active est de: 0,6621 cad 66,21%.

3. Montrons que la probabilité que l'alarme s'active sachant qu'aucun danger ne s'est présenté est de 0,005:

Il s'agit ici de montrer que: $P_{\overline{D}}(A) = 0,005$.

Or: • $P_{\overline{D}}(A) = \dfrac{P(\overline{D} \cap A)}{P(\overline{D})}$.

Et: • $P(\overline{D} \cap A) = P(A) - P(D \cap A)$.

D'où: $P_{\overline{D}}(A) = \dfrac{P(A) - P(D \cap A)}{P(\overline{D})}$

$= \dfrac{0,01465 - 0,0097}{0,99}$

$= 0,005.$

Ainsi, la probabilité que l'alarme s'active sachant qu'aucun danger ne s'est présenté est bien égale à: $0,005$ cad $0,5\%$.

Et nous pouvons donc écrire: • $x = 0,5\%$

• $y = 1 - x = 99,5\%$.

4. Montrons que la probabilité que l'alarme ne fonctionne pas normalement est inférieure à 1%:

Soit E, l'événement: " l'alarme ne fonctionne pas normalement ".

$E = (\overline{A} \cap D) \cup (A \cap \overline{D})$.

Dans ces conditions, d'après la formule des **probabilités totales**:

$P(E) = P(\overline{A} \cap D) + P(A \cap \overline{D})$

$= P_D(\overline{A}) \times P(D) + P_{\overline{D}}(A) \times P(\overline{D})$

$= 0,03 \times 0,01 + 0,005 \times 0,99$

$= 0,00525$ cad $0,525\%$.

Ainsi, comme $0,525\% < 1\%$: OUI, la probabilité que l'alarme ne fonctionne pas normalement est bien inférieure à 1%.

PARTIE B

1. Donnons la loi de probabilité suivie par X et précisons ses paramètres:

Soit l'expérience aléatoire consistant à **prélever successivement et au hasard 5 systèmes d'alarme dans la production de l'usine**: ce prélèvement est assimilé à un tirage avec remise.

Soient les événements S = " l'alarme ne fonctionne pas ", et $\overline{S}$ = " l'alarme fonctionne ".

On désigne par **X** la variable aléatoire qui donne le nombre de systèmes d'alarme ne fonctionnant pas parmi les 5 systèmes d'alarmes prélevés.

Cette expérience est un schéma de Bernoulli.

Nous sommes en présence de 5 épreuves aléatoires identiques et indépendantes, avec à chaque fois 2 issues possibles: S et $\overline{S}$.

La variable aléatoire discrète **X** représentant le nombre de réalisations de S suit donc **une loi binomiale** de paramètres: $n = 5$ et $p = 0,00525$.

Et nous pouvons noter: $X \rightsquigarrow B\,(5\,;\,0,00525)$.

2. Calculons la probabilité qu'un seul système d'alarme ne fonctionne pas:

Il s'agit de calculer ici: $P\,(X = 1)$, avec $X \rightsquigarrow B\,(5\,;\,0,00525)$.

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.

Pour tout entier k, $0 \leqslant k \leqslant n$, la probabilité d'obtenir k succès sur n épreuves indépendantes (ou avec remise) est:

$$P\,(X = k) = \binom{n}{k} p^k \,.\, (1 - p)^{(n-k)}, \text{ avec: } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

D'où ici: $P(X=1)=\binom{5}{1}(0,00525)^1(1-0,00525)^4$

$\approx 0,0257$ (calculatrice).

Au total, la probabilité qu'un seul système d'alarme ne fonctionne pas est d'environ: 2, 57%.

3. **Calculons la probabilité qu'au moins un système d'alarme ne fonctionne pas:**

Pour répondre à cette question, nous devons calculer: $P(X \geqslant 1)$.

Or: $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X < 1)$

$= 1 - P(X = 0)$

$= 1 - \binom{5}{0}(0,00525)^0(1-0,00525)^5$

$\approx 0,0260$ (calculatrice).

Ainsi, la probabilité qu'au moins un système d'alarme ne fonctionne pas est d'environ: 2, 6%.

PARTIE C

Déterminons le plus petit entier " n " tel que $P(X \geqslant 1) > 0,07$:

Répondre à cette question revient à déterminer l'entier naturel " n " tel que:

$$P(X \geqslant 1) > 0,07, \text{ avec } X \leadsto B(n; 0,00525).$$

$P(X \geqslant 1) > 0,07 \iff 1 - P(X = 0) > 0,07$

$$\iff 1 - \binom{n}{0}(0,00525)^0(1 - 0,00525)^n > 0,07$$

$$\iff (1 - 0,00525)^n < 0,93$$

$$\iff n \ln(1 - 0,00525) < \ln(0,93)$$

$$\iff n > \frac{\ln(0,93)}{\ln(1 - 0,00525)}$$ cad $n \geqslant 14$ systèmes d'alarme.

Ainsi, il faut prélever au moins 14 systèmes d'alarme pour que la probabilité d'avoir au moins un système d'alarme qui ne fonctionne pas soit supérieure à 7%.