BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 1

AMÉRIQUE DU NORD
2022

POINT A OU POINT B ?

CORRECTION

1. **Recopions et complétons l'arbre pondéré:**

D'après l'énoncé, nous avons:

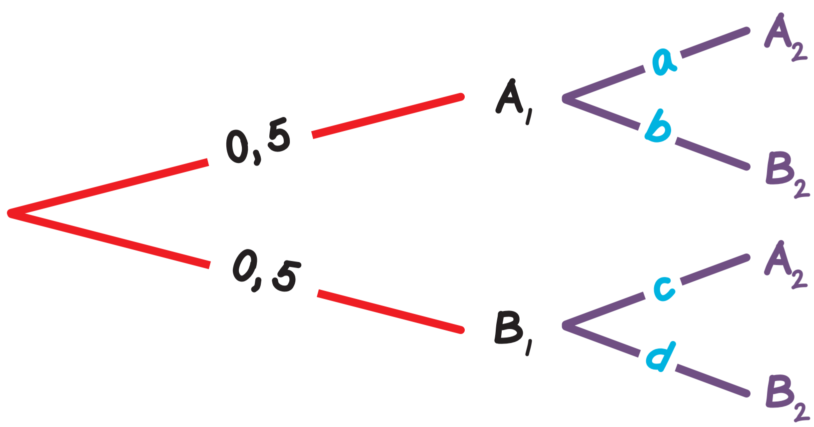
- A_n = " le vélo se trouve en A le n-ième matin ".
- B_n = " le vélo se trouve en B le n-ième matin ".

- $P(A_1) = 50\% = 0,5 = a_1$
- $P(B_1) = 50\% = 0,5 = b_1$

- $P_{A_n}(A_{n+1}) = 0,84$
- $P_{A_n}(B_{n+1}) = 1 - 0,84 = 0,16.$

- $P_{B_n}(B_{n+1}) = 0,76$
- $P_{B_n}(A_{n+1}) = 1 - 0,76 = 0,24.$

L'arbre de probabilités complété est donc le suivant:



, avec:

- $a = 0,84$
- $b = 0,16$
- $c = 0,76$
- $d = 0,24$

.

2. a. Calculons a_2:

Ici, il s'agit de calculer: $\mathbf{a_2 = P(A_2)}$.

L'événement $A_2 = (A_2 \cap A_1) \cup (A_2 \cap B_1)$.

D'après la formule des **probabilités totales**:

$$\mathbf{a_2 = P(A_2)} = P(A_2 \cap A_1) + P(A_2 \cap B_1)$$

$$= P_{A_1}(A_2) \times P(A_1) + P_{B_1}(A_2) \times P(B_1)$$

$$= 0,84 \times 0,5 + 0,24 \times 0,5$$

$$= \mathbf{0,54}.$$

Ainsi, la probabilité que le vélo se trouve au point A le matin du second jour est de: $54\% = a_2$.

2. b. Calculons $P_{A_2}(B_1)$:

Calculer $\mathbf{P_{A_2}(B_1)}$ revient à déterminer la probabilité que le vélo se soit trouvé au point B le premier matin, sachant qu'il se trouve au point A le second matin.

$$P_{A_2}(B_1) = \frac{P(A_2 \cap B_1)}{P(A_2)}$$

$$= \frac{P_{B_1}(A_2) \times P(B_1)}{P(A_2)}$$

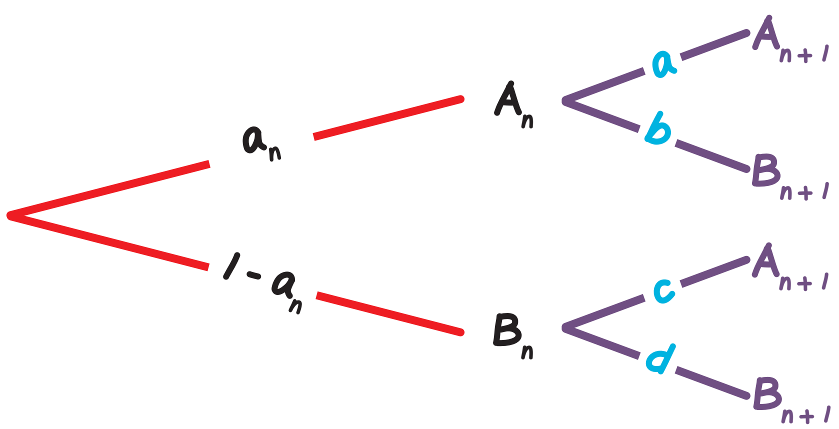
$$= \frac{0,24 \times 0,5}{0,54}$$

$$= 0,222.$$

Ainsi, il y a 22, 2% de chance que le vélo se trouvait au point B le premier matin, sachant qu'il se trouve au point A le second matin.

3. a. Recopions et complétons l'arbre pondéré:

L'arbre pondéré complété est le suivant:



, avec:

- $a = 0,84$
- $b = 0,16$
- $c = 0,76$
- $d = 0,24$

.

3. b. Justifions que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = 0,6\, a_n + 0,24$:

Pour répondre à cette question, nous allons calculer: $a_{n+1} = P(A_{n+1})$.

L'événement $A_{n+1} = (A_{n+1} \cap A_n) \cup (A_{n+1} \cap B_n)$.

D'après la formule des **probabilités totales**:

$$a_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_{n+1} \cap A_n) + P(A_{n+1} \cap B_n)$$

$$= P_{A_n}(A_{n+1}) \times P(A_n) + P_{B_n}(A_{n+1}) \times P(B_n)$$

$$= 0,84 \times a_n + 0,24 \times b_n$$

$$= 0,84 \times a_n + 0,24 \times (1 - a_n)$$

$$= 0,6 \times a_n + 0,24.$$

Ainsi, pour tout entier naturel non nul n, nous avons bien:

$$a_{n+1} = 0,6\, a_n + 0,24.$$

4. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{(n-1)}$:

Ici:
- $a_1 = 0,5$
- $a_{n+1} = 0,6 \times a_n + 0,24$
- $n \in \mathbb{N}^*$.

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel non nul: $a_n = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{(n-1)}$. "

Initialisation: $a_1 = 0,5$?

$$a_1 = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{(1-1)}$$

$$= 0,6 - 0,1 \times 0,6^0$$

$$= 0,6 - 0,1 \times 1$$

$= 0,5.$

Donc vrai au rang " 1 ".

Hérédité: Supposons que pour un certain entier naturel non nul n, $a_n = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{(n-1)}$ et montrons qu'alors $a_{n+1} = 0,6 - 0,1 \times 0,6^n$.

Supposons: $a_n = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{(n-1)}$, pour un entier naturel non nul n fixé.
(1)

(1) $\Rightarrow 0,6 \times a_n = 0,6 \times (0,6 - 0,1 \times 0,6^{(n-1)})$

$\Rightarrow 0,6 \times a_n = 0,36 - 0,1 \times 0,6^n$

$\Rightarrow 0,6 \times a_n + 0,24 = 0,36 - 0,1 \times 0,6^n + 0,24$

$\Rightarrow a_{n+1} = 0,6 - 0,1 \times 0,6^n.$

Conclusion: Pour tout entier naturel non nul n, $a_n = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{(n-1)}$.

5. Déterminons la limite de la suite (a_n) et interprétons:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} 0,6 - 0,1 \times 0,6^{(n-1)}$$

$$= 0,6 \quad \text{car} \quad \lim_{n \to +\infty} 0,6^{(n-1)} = 0, \quad \text{car} \quad 0,6 \in]0;1[.$$

Ainsi, nous avons:
- $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0,6$;
- cela signifie qu'au bout d'un certain temps (" n " très grand), il y a 60% de chance qu'un vélo se retrouve au point A.

6. a. Déterminons le plus petit entier naturel n tel que $a_n \geqslant 0,599$:

Pour répondre à cette question, nous allons résoudre l'inéquation:

$$a_n \geqslant 0,599.$$

$a_n \geqslant 0,599 \iff 0,6 - 0,1 \times 0,6^{(n-1)} \geqslant 0,599$

$\iff 0,6^{(n-1)} \leqslant 0,01$

$\iff \ln [0,6^{(n-1)}] \leqslant \ln [0,01]$

$\iff n - 1 \geqslant \dfrac{\ln [0,01]}{\ln [0,6]}$

cad $n \geqslant 10,02.$

Comme $n \in \mathbb{N}^*$, le plus petit entier naturel n recherché est: $n = 11.$

6. b. Interprétons ce résultat:

$n = 11$ signifie qu'à partir du 11^e jour, la probabilité que le vélo se trouve au point A sera supérieure à 59,9%.