BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 1

AMÉRIQUE DU NORD
2022

SE RENDRE À LA GARE

CORRECTION

1. a. Faisons un arbre pondéré résumant la situation:

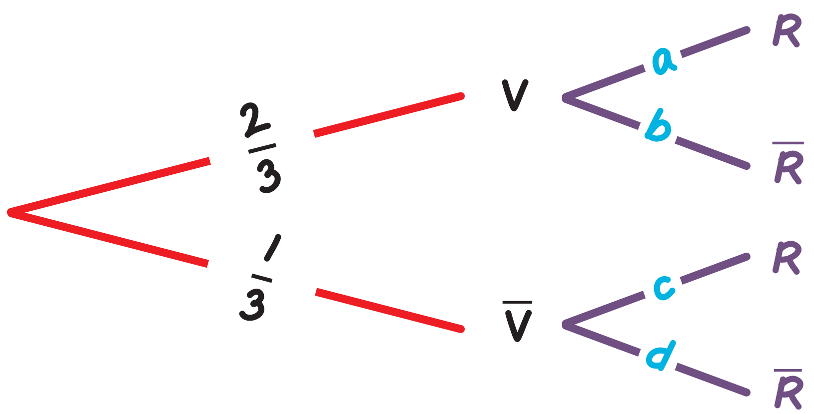
D'après l'énoncé, nous avons:

- V = " Paul prend son vélo ".
- $\overline{V}$ = " Paul prend sa voiture ".
- R = " Paul rate son train ".
- $\overline{R}$ = " Paul chope son train ".
- $P(V) = \frac{2}{3}$
- $P(\overline{V}) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.
- $P_V(R) = \frac{1}{50}$
- $P_V(\overline{R}) = 1 - \frac{1}{50} = \frac{49}{50}$.

- $P_{\overline{V}}(R) = \dfrac{1}{10}$

- $P_{\overline{V}}(\overline{R}) = 1 - \dfrac{1}{10} = \dfrac{9}{10}$.

D'où l'arbre de probabilités suivant:



, avec:

- $a = \dfrac{1}{50}$
- $b = \dfrac{49}{50}$
- $c = \dfrac{1}{10}$
- $d = \dfrac{9}{10}$

1. b. Montrons que la probabilité que Paul rate son train est égale à $\dfrac{7}{150}$:

Ici, il s'agit de calculer **P (R)**.

L'événement $R = (R \cap V) \cup (R \cap \overline{V})$.

D'après la formule des **probabilités totales**:

$$\mathbf{P(R)} = P(R \cap V) + P(R \cap \overline{V})$$

$$= P_V(R) \times P(V) + P_{\overline{V}}(R) \times P(\overline{V})$$

$$= \frac{1}{50} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{10} \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{2}{150} + \frac{1}{30}$$

$= \frac{7}{150}$.

Ainsi, la probabilité que Paul rate son train est bien égale à: $\frac{7}{150}$.

1. c. Calculons $P_R(V)$:

Calculer la probabilité que Paul ait pris son vélo pour rejoindre la gare, sachant qu'il a raté son train, revient à déterminer: $P_R(V)$.

$$P_R(V) = \frac{P(V \cap R)}{P(R)}$$

$$= \frac{P_V(R) \times P(V)}{P(R)}$$

$$= \frac{\frac{1}{50} \times \frac{2}{3}}{\frac{7}{150}}$$

$$= \frac{2}{7}.$$

Ainsi, la probabilité que Paul ait pris son vélo pour rejoindre la gare, sachant qu'il la raté son train est de: $\frac{2}{7}$.

2. a. Déterminons la loi suivie par X et précisons ses paramètres:

Soit l'expérience aléatoire consistant à **choisir au hasard un mois pendant lequel Paul s'est rendu 20 jours à la gare pour rejoindre son lieu de travail (vélo ou voiture)**: on suppose que le choix entre vélo et voiture est indépendant des choix des autres jours.

Soient les événements V = " Paul prend son vélo ", et $\overline{V}$ = " Paul prend sa voiture ".

On désigne par X la variable aléatoire qui donne le nombre de jours où Paul prend son vélo sur ces 20 jours.

Cette expérience est un schéma de Bernoulli.

Nous sommes en présence de 20 épreuves aléatoires identiques et indépendantes, avec à chaque fois 2 issues possibles: V et $\overline{V}$.

La variable aléatoire discrète X représentant le nombre de réalisations de V suit donc **une loi binomiale** de paramètres: $n = 20$ et $p = \frac{2}{3}$.

Et nous pouvons noter: $X \rightsquigarrow B\left(20 ; \frac{2}{3}\right)$.

2. b. Calculons la probabilité que Paul prenne son vélo exactement 10 jours sur ces 20 jours:

Il s'agit de calculer ici: $P(X = 10)$, avec $X \rightsquigarrow B\left(20 ; \frac{2}{3}\right)$.

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.

Pour tout entier k, $0 \leq k \leq n$, la probabilité d'obtenir k succès sur n épreuves indépendantes (ou avec remise) est:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^{k} \cdot (1 - p)^{(n-k)}, \text{ avec: } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

D'où ici: $P(X = 10) = \binom{20}{10}\left(\frac{2}{3}\right)^{10}\left(1 - \frac{2}{3}\right)^{10}$

$$= \binom{20}{10} \left(\frac{2}{3}\right)^{10} \left(\frac{1}{3}\right)^{10}$$

$$= \binom{20}{10} \left(\frac{2}{9}\right)^{10}$$

$\approx$ **0, 054** (calculatrice).

Au total, la probabilité que Paul prenne son vélo exactement 10 jours sur ces 20 jours est d'environ: **5, 4%**.

2. c. Déterminons la probabilité que Paul prenne son vélo au moins 10 jours:

Pour répondre à cette question, nous devons calculer:

$$\mathbf{P\,(X \geqslant 10)}, \text{ avec } X \leadsto B\left(20\,;\frac{2}{3}\right).$$

Or: $\mathbf{P\,(X \geqslant 10)} = 1 - P\,(X < 10)$

$= 1 - P\,(X \leqslant 9)$

$\approx$ **0, 962** (calculatrice).

Ainsi, la probabilité que Paul prenne son vélo au moins 10 jours sur ces 20 jours est d'environ: **96, 2%**.

2. d. En moyenne, combien de jours ... ?

Pour répondre à cette question, nous allons calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire **X**: **E (X)**.

D'après le cours: $\mathbf{E\,(X)} = n \cdot p$.

Donc ici nous avons: $E(X) = 20 \times \frac{2}{3}$

$$= \frac{40}{3}.$$

Ainsi en moyenne, le nombre de jours demandés sur une période choisie au hasard de 60 jours est de: $\frac{40}{3} \times 3 = 40.$

3. Déterminons E (T) et interprétons:

D'après le cours: $E(T) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_9 x_9.$

Ici, d'après la loi de probabilités, nous avons:

$$E(T) = (0,14 \times 10) + (0,13 \times 11) + (0,13 \times 12) + (0,12 \times 13) + (0,12 \times 14) + (0,11 \times 15) + (0,10 \times 16) + (0,08 \times 17) + (0,07 \times 18)$$

$$\approx 13,5 \text{ minutes}.$$

Cela signifie qu'en moyenne, Paul mettra 13, 5 minutes pour se rendre en voiture à la gare.