www.freemaths.fr

BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 1

MAYOTTE, RÉUNION
2023

LES MATELAS

CORRECTION

PARTIE A

1. Recopions et complétons l'arbre pondéré:

D'après l'énoncé, nous avons:

- R = " le client achète un matelas Ressorts ".
- $\overline{R}$ = " le client achète une matelas Mousse ".
- S = " Le client est content de son achat ".
- $\overline{S}$ = " Le client n'est pas content de son achat ".

- $P(R) = 20\%$
- $P(\overline{R}) = 1 - 20\% = 80\%$.

- $P(S) = 82\%$
- $P(\overline{S}) = 1 - 82\% = 18\%$.

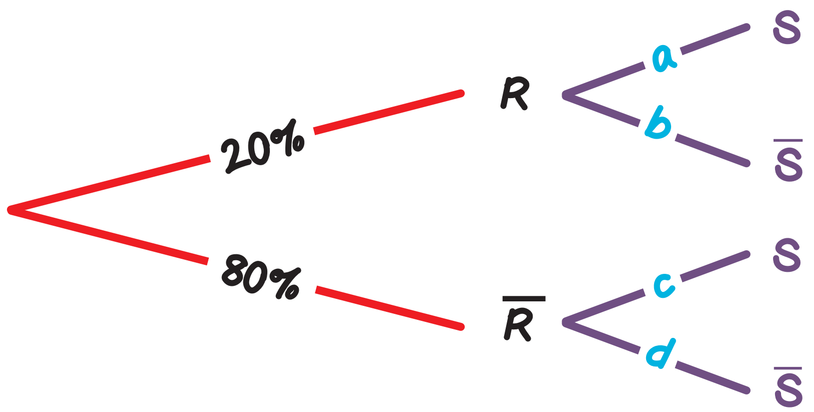
- $P_R(S) = 90\%$

- $P_R(\overline{S}) = 1 - 90\% = 10\%.$

- $P_{\overline{R}}(S) = x$

- $P_{\overline{R}}(\overline{S}) = y = 1 - x.$

D'où l'arbre de probabilités complété est le suivant:



, avec:

- $a = 90\%$
- $b = 10\%$
- $c = x$
- $d = y$

2. Démontrons que $x = 0,8$:

" x " correspond à: $P_{\overline{R}}(S).$

Or: $P_{\overline{R}}(S) = \dfrac{P(\overline{R} \cap S)}{P(\overline{R})}$

$$= \frac{P(S) - P(R \cap S)}{P(\overline{R})} \qquad (P(S) = P(S \cap R) + P(S \cap \overline{R}))$$

$$= \frac{82\% - P_R(S) \times P(R)}{80\%}$$

$$= \frac{82\% - 90\% \times 20\%}{80\%}$$

$$= 0,8\%.$$

Ainsi, la probabilité que le client soit satisfait sachant qu'il choisit un matelas Mousse est égal à: $x = 0,8$ cad $x = 80\%$.

3. Calculons $P_S(R)$:

Calculer la probabilité que le client ait acheté un matelas Ressorts sachant qu'il est satisfait revient à déterminer: $P_S(R)$.

$$P_S(R) = \frac{P(S \cap R)}{P(S)}$$

$$= \frac{P(R \cap S)}{P(S)}$$

$$= \frac{P_R(S) \times P(R)}{P(S)}$$

$$= \frac{90\% \times 20\%}{82\%}$$

$\approx 0,219$ ou $0,22$ au centième près.

Ainsi, la probabilité que le client ait acheté un matelas Ressorts avec satisfaction est d'environ: $0,22$ cad 22%.

PARTIE B

1. a. Donnons les paramètres de la loi binomiale suivie par X:

La variable aléatoire X qui donne le nombre de clients satisfaits de leur achat parmi 5, suit une loi binomiale de paramètres: $n = 5$ et $p = 82\%$.

Et nous pouvons noter : $X \rightsquigarrow B(5\,;\,82\%)$.

1. b. Déterminons la probabilité qu'au plus 3 clients soient satisfaits :

Il s'agit de calculer ici : $P(X \leqslant 3)$, avec $X \rightsquigarrow B(5\,;\,82\%)$.

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.

Pour tout entier k, $0 \leqslant k \leqslant n$, la probabilité d'obtenir k succès sur n épreuves indépendantes (ou avec remise) est :

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{(n-k)}, \text{ avec : } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

D'où ici : $P(X \leqslant 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$

$$\approx 0,2223 \qquad (\text{calculatrice}).$$

Au total, la probabilité qu'au plus 3 clients soient satisfaits est d'environ : 0,2223 cad 22,23%.

2. a. Démontrons que $p_n = (0,92)^n$:

Déterminer la probabilité que les " n " clients soient tous satisfaits de leur achat revient à calculer : $P(X=n)$, avec $X \rightsquigarrow B(n\,;\,82\%)$.

$$p_n = P(X=n) = \binom{n}{n} (82\%)^n (1-82\%)^0$$

$$= 1 \times (82\%)^n \times 1$$

$$= (0,82)^n.$$

Ainsi, nous avons bien : $p_n = (0,82)^n$.

2. b. Déterminons les entiers naturels " n " tels que $p_n < 0,01$ et interprétons:

$p_n < 0,01 \iff (0,82)^n < 0,01$

$\iff n \times \ln(0,82) < \ln(0,01)$

$\iff n > \dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,82)}$ cad $n \geqslant 24$ clients.

Les entiers naturels " n " sont donc tels que: $n \geqslant 24$.

Cela signifie qu'il faut au minimum 24 clients pour qu'ils soient tous satisfaits avec une probabilité strictement inférieure à 1%.