BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 4

CENTRES ÉTRANGERS 1

2022

LA PAIRE DE LUNETTES

CORRECTION

PARTIE A

1. Recopions et complétons le tableau:

D'après l'énoncé, nous avons:

- A = " les verres présentent un défaut pour le traitement T_1 ".
- $\overline{A}$ = " les verres ne présentent pas de défaut pour le traitement T_1 ".
- B = " les verres présentent un défaut pour le traitement T_2 ".
- $\overline{B}$ = " les verres ne présentent pas de défaut pour le traitement T_2 ".

- $P(A) = 0,1$
- $P(\overline{A}) = 1 - 0,1 = 0,9$.

- $P(B) = 0,2$

- $P(\overline{B}) = 1 - 0,2 = 0,8.$

- $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,75.$

(NE PRÉSENTE AUCUN DES 2 DÉFAUTS)

Tableau complété version 1:

	A	$\overline{A}$	Total
B	$P(A \cap B)$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(B)$
$\overline{B}$	$P(A \cap \overline{B})$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	$P(\overline{B})$
Total	$P(A)$	$P(\overline{A})$	1

Tableau complété version 2:

	A	$\overline{A}$	Total
B	x	y	0,2
$\overline{B}$	z	0,75	0,8
Total	0,1	0,9	1

Avec:
- $z = 0,8 - 0,75 = 0,05$
- $y = 0,9 - 0,75 = 0,15$
- $x = 0,1 - 0,05 = 0,05.$

2. a. Déterminons la probabilité demandée:

Ici, il s'agit de calculer la probabilité qu'une paire de verres présente un défaut pour au moins un des deux traitements T_1 ou T_2.

Cela revient donc à calculer: **P (A U B).**

Or: $\mathbf{P(A \cup B)} = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= 0,1 + 0,2 - 0,05$

$= \mathbf{0,25}$.

Ainsi, il y a 25% de chance que la paire de verres présente un défaut pour au moins un des deux traitements.

2. b. Donnons la probabilité qu'une paire de verres présente deux défauts:

Donner la probabilité qu'une paire de verres présente deux défauts, un pour chaque traitement T_1 et T_2 revient à calculer: **P (A ∩ B).**

Or d'après le **tableau version 2**: $P(A \cap B) = \mathbf{0,05}$.

Ainsi, il y a 5% de chance que la paire de verres présente deux défauts, un pour chaque traitement T_1 et T_2.

2. c. Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

D'après le cours, les évènements A et B sont indépendants ssi:

$$\mathbf{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}.$$

Or ici: • $P(A \cap B) = \mathbf{0,05}$

• $P(A) = \mathbf{0,1}$

• $P(B) = 0,2$.

Comme $P(A) \times P(B) = 0,02 \neq 0,05$: les évènements A et B ne sont pas indépendants.

3. Calculons la probabilité qu'une paire de verres présente un défaut pour un seul des deux traitements:

Calculer la probabilité qu'une paire de verres présente un défaut pour un seul des deux traitements revient à déterminer la probabilité suivante:

$$P(A \cap \overline{B}) \cup P(\overline{A} \cap B).$$

D'après le tableau: $P(A \cap \overline{B}) \cup P(\overline{A} \cap B) = 0,05 + 0,15$

$$= 0,2.$$

Ainsi, il y a 20% de chance qu'une paire de verres présente un défaut pour un seul des deux traitements.

4. Calculons $P_A(B)$:

Calculer $P_A(B)$ revient à déterminer la probabilité qu'une paire de verres présente un défaut pour le traitement T_2, sachant que cette paire de verres présente un défaut pour le traitement T_1.

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$= \frac{0,05}{0,1}$$

$= 0,5$.

Ainsi, il y a **50% de chance** qu'une paire de verres présente un défaut pour le traitement T_2, sachant que cette paire de verres présente un défaut pour le traitement T_1.

PARTIE B

1. Justifions que la variable aléatoire X suit une loi binomiale:

Soit l'expérience aléatoire consistant à **prélever, au hasard, un échantillon de 50 paires de verres dans la production**: la production est suffisamment importante pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.

Soient les événements $A =$ " la paire de verres présente un défaut pour le traitement T_1 ", et $\overline{A} =$ " la paire de verres ne présente pas de défaut pour le traitement T_1 ".

On désigne par **X** la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de ce type, associe le nombre de paires de verres qui présentent un défaut pour le traitement T_1.

Cette expérience est un schéma de Bernoulli.

Nous sommes en présence de 50 épreuves aléatoires identiques et indépendantes, avec à chaque fois 2 issues possibles: A et $\overline{A}$.

La variable aléatoire discrète **X** représentant le nombre de réalisations de **A** suit donc **une loi binomiale** de paramètres: $n = 50$ et $p = 0,1$.

Et nous pouvons noter : $X \rightsquigarrow B(50\,;\,0,1)$.

2. a. Donnons l'expression permettant de calculer la probabilité d'avoir exactement 10 paires de verres qui présentent ce défaut :

Il s'agit de calculer ici : $P(X = 10)$, avec $X \rightsquigarrow B(50\,;\,0,1)$.

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.

Pour tout entier k, $0 \leqslant k \leqslant n$, la probabilité d'obtenir k succès sur n épreuves indépendantes (ou avec remise) est :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1 - p)^{(n-k)}, \text{ avec : } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

D'où ici : $P(X = 10) = \binom{50}{10} (0,1)^{10} (1 - 0,1)^{(50-10)}$

$$= \binom{50}{10} (0,1)^{10} (0,9)^{40}.$$

L'expression demandée est donc : $\binom{50}{10} (0,1)^{10} (0,9)^{40}$.

2. b. Effectuons le calcul :

$$P(X = 10) = \binom{50}{10} (0,1)^{10} (0,9)^{40}$$

$\approx 0,015$ (calculatrice).

Ainsi, la probabilité d'avoir exactement 10 paires de verres qui présentent ce défaut est d'environ : 1,5%.

3. En moyenne combien de paires ... ?

Répondre à: " Combien de paires de verres ayant ce défaut peut-on trouver dans un échantillon de 50 paires ? ", revient à calculer: **E (X)**.

D'après le cours: $E(X) = n.p$.

Ici nous avons: $E(X) = 50 \times 0,1$

$= 5$ paires de verres.

Ainsi en moyenne, le nombre de paires de verres ayant le défaut T, dans un échantillon de 50 paires est de: 5.