www.freemaths.fr

Maths Complémentaires Terminale

Loi exponentielle

MINI COURS

I. Définition d'une loi exponentielle:

1. Définition:

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, avec $\lambda > 0$.

Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ si sa densité de probabilité s'écrit:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x} & \text{pour tout } x \in [\, 0 ; +\infty \,[\\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} .$$

2. Remarque:

Notons que quand $x = 0$: $f(0) = \lambda\, e^{-\lambda \cdot 0}$ cad $f(0) = \lambda$.

Ainsi, λ correspond à l'ordonnée du point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de l'axe des ordonnées.

II. Fonction de répartition:

1. Définition:

La fonction de répartition F d'une loi exponentielle de paramètre λ est définie par:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{pour tout } x \in [\, 0 ; +\infty \,[\\ 0 & \text{si x} < 0 \end{cases} .$$

2. Propriétés:

- $P(X \in [0; a]) = 1 - e^{-\lambda . a}$.

- $P(X \in [a; b]) = P(a < X < b)$

$= P(a \leq X \leq b)$

$= P(a \leq X < b)$

$= P(a < X \leq b)$

$= F(b) - F(a)$

$= (1 - e^{-\lambda b}) - (1 - e^{-\lambda a})$

$= e^{-\lambda . a} - e^{-\lambda . b}$.

- $P(X \in [a; +\infty[) = e^{-\lambda . a}$.

III. Espérance et Variance:

Sachant que la variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ, nous avons:

- $E(X) = \frac{1}{\lambda}$,

- $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

IV. Durée de vie sans vieillissement:

1. Propriété:

Sachant que la variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ, pour tout $a \geq 0$ et tout $h \geq 0$, nous avons:

$$P_{(X \in [a;+\infty[)}(X \in [a+h;+\infty[) = P(X \in [h;+\infty[).$$

2. Vocabulaire:

On dit que la loi exponentielle est appelée:

- loi d'absence de mémoire

ou

- loi de durée de vie sans vieillissement.