Maths Complémentaires Terminale

Intégrales par IPP

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

DOUBLE INTÉGRATION PAR PARTIES

2

CORRECTION

Calculons I à l'aide d'une IPP:

Ici: $I = \int_0^{\pi} e^{-2x} \sin x \, dx$.

Soit $f(x) = e^{-2x} \sin x$. f est continue sur $[\,0\,;\,\pi\,]$. Elle admet donc des primitives sur $[\,0\,;\,\pi\,]$ et par conséquent **I existe**.

Ayons recours à une intégration par parties (**IPP**) pour le calcul de l'intégrale I.

Posons:
- $u(x) = e^{-2x}$, d'où $u'(x) = -2e^{-2x}$
- $v'(x) = \sin x$, d'où $v(x) = -\cos x$.

(u et v admettent des dérivées continues sur $[\,0\,;\,\pi\,]$)

Dans ces conditions: $I = \left[\, u(x) \times v(x) \,\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} v(x) \times u'(x)\, dx$

$$= \left[\, (e^{-2x}) \times (-\cos x) \,\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-\cos x) \times (-2e^{-2x})\, dx$$

$$= -[\, e^{-2x} \cos x \,]_0^{\pi} - 2 \int_0^{\pi} e^{-2x} \cos x \, dx.$$

Procédons à une seconde intégration par parties pour le calcul de:

$$J = \int_0^{\pi} e^{-2x} \cos x \, dx.$$

Soit $g(x) = e^{-2x} \cos x$. g est continue sur $[\,0\,;\,\pi\,]$. Elle admet donc des primitives sur $[\,0\,;\,\pi\,]$ et par conséquent **J existe**.

Posons: • $u(x) = e^{-2x}$, d'où $u'(x) = -2e^{-2x}$

• $v'(x) = \cos x$, d'où $v(x) = \sin x$.

Dans ces conditions: $J = [\,(e^{-2x}) \times (\sin x)\,]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (\sin x) \times (-2e^{-2x}) \, dx$

$$= [\, e^{-2x} \sin x \,]_0^{\pi} + 2 \int_0^{\pi} e^{-2x} \sin x \, dx$$

$$= [\, e^{-2x} \sin x \,]_0^{\pi} + 2 \times I.$$

Par conséquent: $I = -[\, e^{-2x} \cos x \,]_0^{\pi} - 2\,([e^{-2x} \sin x]_0^{\pi} + 2 \times I)$

$\iff 5I = -[\, e^{-2x} \cos x \,]_0^{\pi} - 2\,[\, e^{-2x} \sin x \,]_0^{\pi}$

$\iff 5I = 1 + e^{-2\pi}$.

cad: $I = \dfrac{1}{5}(1 + e^{-2\pi})$.

Au total, nous avons: $I = \frac{1}{5}(1 + e^{-2\pi})$.