

www.freemaths.fr

Maths Complémentaires Terminale

Calcul d'intégrales



MINI COURS

A. Définition d'une primitive F de f sur I :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I .

On appelle **primitive de f** sur I toute fonction F dérivable sur I telle que :

$$F' = f.$$

B. Propriété :

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives.

C. Les primitives G de f sur I :

Soit F une primitive de la fonction f sur I .

Toutes les primitives G de f sur I sont de la forme : $G(x) = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$.

D. La primitive qui s'annule en " a " :

Toutes les primitives G de f sur I sont de la forme : $G(x) = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$.

Déterminer la primitive de f qui s'annule en " a " revient à trouver le nombre réel " c " tel que : $G(a) = 0$.

E. Tableaux des primitives :

Tu dois connaître par ♥ les primitives F des fonctions f suivantes.

Tableau 1 :

f	F	I
k	$k \cdot x$	\mathbb{R}
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	<ul style="list-style-type: none"> • $n \neq 0$ et $n \neq -1$ • si $n > 0$: \mathbb{R} • $] -\infty, 0 [$ ou $] 0, +\infty [$ si $n < -1$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$] 0, +\infty [$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$	\mathbb{R}^*
e^x	e^x	\mathbb{R}
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$	$] 0, +\infty [$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	\mathbb{R}
$\cos(x)$	$\sin(x)$	\mathbb{R}
$\ln(x)$	$x \ln(x) - x$	$] 0, +\infty [$

Tableau 2 :

f	F	Conditions
$k \cdot u'$	$k \cdot u$	
$u' + v'$	$u + v$	
$u' \cdot u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	<ul style="list-style-type: none"> • $n \in \mathbb{N}$ • $n \neq 0$ • $n \neq -1$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	u strictement positive sur I
$\frac{u'}{u}$	$\ln(u)$	u strictement positive sur I
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$	<ul style="list-style-type: none"> • $n \in \mathbb{N}$ • $n > 1$ • $u \neq 0$ sur I
$u' e^u$	e^u	
$\sin(ax + b)$	$-\frac{1}{a} \cos(ax + b)$	$a \neq 0$
$\cos(ax + b)$	$\frac{1}{a} \sin(ax + b)$	$a \neq 0$

F. Intégrale d'une fonction continue :

1. Définition :

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ et soit F une primitive de f :

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

2. Valeur moyenne :

Pour toute fonction f continue sur $[a; b]$, la valeur moyenne de f sur $[a; b]$ est le réel μ tel que :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx.$$

3. Propriétés essentielles :

- $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \cdot \int_0^a f(x) dx$, quand f paire.
- $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$, quand f impaire.
- $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$.
- $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$.

- $\int_a^b \lambda f(x) \, dx = \lambda \int_a^b f(x) \, dx.$

- **CHASLES:** $\int_a^b f(x) \, dx + \int_b^c f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx.$