Maths Complémentaires Terminale

Convexité & Concavité

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

ÉTUDIER LA CONVEXITÉ 2

CORRECTION

1. Calculons $f'(x)$ et $f''(x)$ sur $[-10;5]$:

Ici: $\boldsymbol{f(x) = (x-5)\,e^{0,2x} + 5}$, pour tout $x \in [-10;5]$.

D'après l'énoncé f est **deux fois dérivables** sur $[-10;5]$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer f' et f'' pour tout $x \in [-10;5]$:

- $\boldsymbol{f'(x)} = (1) \times (e^{0,2x}) + (x-5) \times (0,2e^{0,2x})$

  $= \boldsymbol{0,2\,xe^{0,2x}}$.

- $\boldsymbol{f''(x)} = (0,2 \times 1) \times (e^{0,2x}) + (0,2x) \times (0,2e^{0,2x})$

  $= \boldsymbol{(0,2 + 0,04x)\,e^{0,2x}}$.

Ainsi, pour tout $x \in [-10;5]$:

$$f'(x) = 0,2\,xe^{0,2x} \quad \text{et} \quad f''(x) = (0,2 + 0,04x)\,e^{0,2x}.$$

2. Étudions le sens de variation de f et dressons le tableau de variation:

a. Sens de variation de f:

Nous allons distinguer 2 cas pour tout $x \in [-10; 5]$:

• 1er cas: $f'(x) \leq 0$.

$f'(x) \leq 0$ ssi $0,2x \leq 0$ cad ssi: $x \leq 0$ $(e^{0,2x} > 0)$.

• 2e cas: $f'(x) \geq 0$.

$f'(x) \geq 0$ ssi $0,2x \geq 0$ cad ssi: $x \geq 0$ $(e^{0,2x} > 0)$.

Ainsi: • f est décroissante sur $[-10; 0]$,

• f est croissante sur $[0; 5]$.

b. Tableau de variation de f:

Nous avons le tableau de variation suivant:

x	-10		0		5
f'		$-$	0	$+$	
f	a	$\searrow$	b	$\nearrow$	c

Avec: • $a = -15\, e^{-2} + 5$,

• $b = 0$,

• $c = 5$.

3. Étudions la convexité de la fonction f:

D'après le cours: • f est concave sur un intervalle I ssi:

pour tout $x \in I$, $f''(x) \leq 0$.

• f est convexe sur un intervalle I' ssi:

pour tout $x \in I'$, $f''(x) \geqslant 0$.

Or ici, pour tout $x \in [-10 ; 5]$: $f''(x) = (0,2 + 0,04x)\, e^{0,2x}$:

Dans ces conditions: • $f''(x) \leqslant 0$ ssi: $0,2 + 0,04x \leqslant 0$ cad: $x \leqslant -5$,

• $f''(x) \geqslant 0$ ssi: $0,2 + 0,04x \geqslant 0$ cad: $x \geqslant -5$.

(car pour tout $x \in IR$, $e^{0,2x} > 0$)

Ainsi: • f est concave sur $I = [-10 ; -5]$,

• f est convexe sur $I' = [-5 ; 5]$.