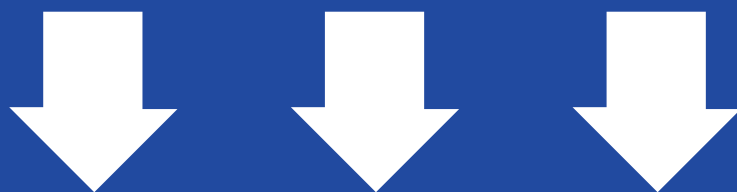


[www.freemaths.fr](http://www.freemaths.fr)

# Maths Complémentaires Terminale

**Convexité & Concavité**



**CORRIGÉ DE L'EXERCICE**

## CORRECTION

1. Calculons  $f'(x)$  et  $f''(x)$  sur  $[0; 10]$ :

Ici:  $f(x) = \frac{1}{0,5 + 100 e^{-x}}$ , pour tout  $x \in [0; 10]$ .

D'après l'énoncé  $f$  est deux fois dérivable sur  $[0; 10]$ .

Dans ces conditions, nous pouvons calculer  $f'$  et  $f''$  pour tout  $x \in [0; 10]$ :

$$\begin{aligned} \bullet f'(x) &= \frac{(0) \times (0,5 + 100 e^{-x}) - (1) \times (-100 e^{-x})}{[0,5 + 100 e^{-x}]^2} \\ &= \frac{100 e^{-x}}{[0,5 + 100 e^{-x}]^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet f''(x) &= \frac{(-100 e^{-x}) \times (0,5 + 100 e^{-x})^2}{[0,5 + 100 e^{-x}]^4} \\ &\quad - \frac{(100 e^{-x}) \times [2 \times (0,5 + 100 e^{-x}) \times (-100 e^{-x})]}{[0,5 + 100 e^{-x}]^4} \\ &= \frac{100 e^{-x} \times (100 e^{-x} - 0,5)}{[0,5 + 100 e^{-x}]^3}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout  $x \in [0; 10]$ :

$$f'(x) = \frac{100 e^{-x}}{[0,5 + 100 e^{-x}]^2} \text{ et } f''(x) = \frac{100 e^{-x} x (100 e^{-x} - 0,5)}{[0,5 + 100 e^{-x}]^3}.$$

2. Étudions le sens de variation de  $f$  et dressons le tableau de variation:

a. Sens de variation de  $f$ :

Pour tout  $x \in [0; 10]$ :  $f'(x) = \frac{100 e^{-x}}{[0,5 + 100 e^{-x}]^2}.$

Comme pour tout  $x \in [0; 10]$ ,  $[0,5 + 100 e^{-x}]^2 > 0$ , le signe de  $f'(x)$  dépend du signe de  $100 e^{-x}$ .


Or pour tout  $x \in [0; 10]$ :  $100 e^{-x} > 0$ .

Dans ces conditions:  $f'(x) > 0$ , pour tout  $x \in [0; 10]$ .

Ainsi:  $f$  est strictement croissante sur  $[0; 10]$ .

b. Tableau de variation de  $f$ :

Nous avons le tableau de variation suivant:

$x$	0	10
$f'$	+	
$f$		

Avec: •  $a = f(0) \Rightarrow a = \frac{1}{100,5}$ ,

•  $b = f(10) \Rightarrow b = \frac{1}{0,5 + 100 e^{-10}}$ .

### 3. Étudions la convexité de la fonction $f$ :

D'après le cours: •  $f$  est concave sur un intervalle  $I$  ssi:

$$\text{pour tout } x \in I, f''(x) \leq 0.$$

•  $f$  est convexe sur un intervalle  $I'$  ssi:

$$\text{pour tout } x \in I', f''(x) \geq 0.$$

Or ici, pour tout  $x \in [0; 10]$ :  $f''(x) = \frac{100 e^{-x} x (100 e^{-x} - 0,5)}{[0,5 + 100 e^{-x}]^3}$ .

Nous allons distinguer 2 cas pour tout  $x \in [0; 10]$ , sachant que:

- $100 e^{-x} > 0$
- $[0,5 + 100 e^{-x}]^3 > 0$ .

• 1<sup>er</sup> cas:  $f''(x) \geq 0$ .

$$f''(x) \geq 0 \text{ ssi } 100 e^{-x} - 0,5 \geq 0 \text{ cad ssi } x \leq \ln(200).$$

• 2<sup>e</sup> cas:  $f''(x) \leq 0$ .

$$f''(x) \leq 0 \text{ ssi } 100 e^{-x} - 0,5 \leq 0 \text{ cad ssi } x \geq \ln(200).$$

Ainsi: •  $f$  est convexe sur  $I' = [0; \ln(200)]$ ,

•  $f$  est concave sur  $I = [\ln(200); 10]$ .