

www.freemaths.fr

Maths Complémentaires Terminale

Fonctions, Synthèse



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

1. Démontrons que la tangente en M à Cf est perpendiculaire à la tangente en N à Cg:

Soient: • $y = ax + b$, l'équation de la tangente (D) en M à Cf,

• $y = cx + d$, l'équation de la tangente (D') en N à Cg.

D'après le cours: • D et D' sont parallèles ssi $a = c$

• D et D' sont perpendiculaires ssi $a \times c = -1$.

Ici, il s'agit donc de déterminer les équations respectives des 2 tangentes.

L'équation de la tangente en M à Cf:

• Ici: • $f(x) = e^x$

• $Df = \mathbb{R}$.

f est dérivable sur \mathbb{R} comme fonction " exponentielle ".

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = e^x$.

• (D) est tangente à Cf au point M ($a; f(a)$) cad M ($a; e^a$).

• D'où, l'équation de la droite (D) est:

$$y - y_M = f'(M)(x - x_M) \iff y - e^a = f'(a)(x - a)$$

$$\implies y = e^a x + e^a(1 - a).$$

Ainsi: • l'équation de la tangente (D) est: $y = e^a x + e^a (1 - a)$,

• (D) a pour coefficient directeur: e^a .

L'équation de la tangente en N à Cg:

• Ici: • $g(x) = e^{-x}$

• $Dg = \mathbb{R}$.

g est dérivable sur \mathbb{R} comme fonction "exponentielle".

Ainsi, nous pouvons calculer g' pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g'(x) = -e^{-x}$.

• (D') est tangente à Cg au point N ($a; g(a)$) cad N ($a; e^{-a}$).

• D'où, l'équation de la droite (D') est:

$$y - y_N = f'(N)(x - x_N) \iff y - e^{-a} = g'(a)(x - a)$$

$$\implies y = (-e^{-a})x + e^{-a}(1 + a).$$

Ainsi: • l'équation de la tangente (D') est: $y = (-e^{-a})x + e^{-a}(1 + a)$,

• (D') a pour coefficient directeur: $-e^{-a}$.

Au total, comme: $(e^a) \times (-e^{-a}) = -1$, $D \perp D'$.

2. a. Que peut-on conjecturer pour la longueur PQ ?

La conjecture que nous pouvons émettre sur la longueur PQ est:

"a priori, il semble, que pour tout réel a , la longueur PQ est constante et égale à 2".

2. b. Démontrons cette conjecture:

Il s'agit ici de montrer que, pour tout réel a , la longueur $PQ = 2$.

Pour ce faire, nous devons déterminer les coordonnées des points P et Q .

D'après 1: • l'équation de la tangente est: $y = e^a x + e^a (1 - a)$ (1)

• l'équation de la tangente est: $y = (-e^{-a})x + e^{-a}(1 + a)$ (2)

Or: • $y_p = 0 \Rightarrow x_p = a - 1$, d'après (1),

• $y_q = 0 \Rightarrow x_q = 1 + a$, d'après (2).

Et donc, la longueur PQ est: $PQ = |x_q - x_p| \Rightarrow PQ = 2$.

Au total, pour tout réel a , nous avons toujours: $PQ = 2$.