www.freemaths.fr

# BACCALAURÉAT
# MATHÉMATIQUES

## SUJET 2

## CORRIGÉ EXERCICE 3

## POLYNÉSIE

## 2023

$$g(x) = \frac{4}{(1 + e^{-kx})}$$

# CORRECTION

## PARTIE A



**1. Déterminons quelle courbe correspond à quelle fonction:**

Nous sommes ici en présence des représentations graphiques des courbes des fonctions $f$, $f'$ et $f''$.

Nous avons:
- $\mathcal{C}_1$ est la courbe représentative de la fonction $f''$
- $\mathcal{C}_2$ est la courbe représentative de la fonction $f$
- $\mathcal{C}_3$ est la courbe représentative de la fonction $f'$.

**2. Déterminons le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_2$ au point A $(4\,; f(4))$:**

Le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_2$ au point A est égal à:

$f'(4)$ cad par lecture graphique sur $\mathcal{C}_3$ $f'(4) = 3$.

**3. Donnons l'abscisse de chaque point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_1$:**

Les points d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_1$ semblent avoir comme abscisse respectifs: $x = 3$, $x = 4$ et $x = 5$.

# PARTIE B

## 1. Déterminons les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$:

Ici: • $g(x) = \frac{4}{1 + e^{-kx}}$, $k > 0$ $\left(\frac{u}{v}\right)$

• $\mathcal{D}g = \mathbb{R}$.

• $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{4}{1 + e^{-kx}}$.

Or d'après le cours: • $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-kx} = \lim\limits_{X \to +\infty} e^{X} = +\infty$, **avec**: $X = -kx$.

Dans ces conditions: $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \frac{4}{1 + (+\infty)} = 0$.

• $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4}{1 + e^{-kx}}$.

Or d'après le cours: • $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-kx} = \lim\limits_{X \to -\infty} e^{X} = 0$, **avec**: $X = -kx$.

Dans ces conditions: $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \frac{4}{1 + 0} = 4$.

## 2. Prouvons que $g'(0) = k$:

Pour montrer que $g'(0) = k$, nous allons calculer la dérivée de la fonction

$g(x) = \frac{4}{1 + e^{-kx}}$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$, d'après l'énoncé.

Pour tout $x \in IR$: $g'(x) = \frac{(0) \times (1 + e^{-kx}) - (4) \times (-k\, e^{-kx})}{[1 + e^{-kx}]^2}$

$$\left( \frac{U' \times V - U \times V'}{V^2} \right)$$

$$= \frac{4\,k\,e^{-kx}}{[1 + e^{-kx}]^2}.$$

Dans ces conditions: $g'(0) = \frac{4k}{4} = k.$

Nous venons donc de prouver que: $g'(0) = k.$

3. **Montrons que la courbe de g admet un point d'inflexion en $x = 0$:**

D'après le cours, si $g''$ s'annule et change de signe en $a$ alors $\mathcal{C}_g$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse $x = a$.

Or ici: $g''(x) = -4\,e^{kx}\,(e^{kx} - 1)\,\frac{k^2}{(e^{kx} + 1)^3}$, pour tout $x \in IR$.

Pour répondre à la question, nous devons étudier le signe de la fonction $g''$, **sachant que pour tout $x \in IR$:**
- $e^{kx} > 0$
- $\frac{k^2}{(e^{kx} + 1)^3} > 0.$

Distinguons deux cas pour tout $x \in IR$.

$1^{er}$ cas: $g''(x) \leqslant 0.$

$g''(x) \leqslant 0 \iff -4\,(e^{kx} - 1) \leqslant 0$

$\iff e^{kx} - 1 \geqslant 0$

$\Longleftrightarrow \; e^{kx} \geqslant 1$

$\Longleftrightarrow \; kx \geqslant 0$ cad $x \geqslant 0$ car $k > 0$.

2ᵉ cas: $g''(x) \geqslant 0$.

$g''(x) \geqslant 0 \Longleftrightarrow 4\,(e^{kx} - 1) \geqslant 0$ cad $x \leqslant 0$ car $k > 0$.

Ainsi, la fonction $g''$ s'annule et change de signe quand: $x = 0$ et par conséquent le point $B\,(0\,;\,g\,(0))$ cad $B\,(0\,;\,2)$ est bien un point d'inflexion.