www.freemaths.fr

BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 1

CENTRES ÉTRANGERS 2

2023

$$f(x) = \frac{1}{(1 + e^{-3x})}$$

CORRECTION

PARTIE A

1. Déterminons l'équation réduite de la tangente T :

Ici: • $f(x) = \frac{1}{(1 + e^{-3x})}$ $\left(\frac{u}{1 + e^{v}}\right)$

• $\mathcal{D}f = \mathbb{R}$

• $A = \left(0 ; \frac{1}{2}\right)$

• $B = \left(1 ; \frac{5}{4}\right)$.

L'équation de la tangente T à $\mathcal{C}f$ au point $A\left(0 ; \frac{1}{2}\right)$ s'écrit:

$$y = f'(x_A) \times (x - x_A) + f(x_A)$$

$$\Longleftrightarrow \quad y = \left(\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\right) \times (x - 0) + \frac{1}{2}$$

$$\Longleftrightarrow \quad y = \left(\frac{\frac{5}{4} - \frac{1}{2}}{1 - 0}\right) \times x + \frac{1}{2}$$

cad: $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$.

L'équation réduite de la tangente T est donc: $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$.

2. Donnons les intervalles sur lesquels f semble convexe ou concave:

La fonction f semble:
- convexe sur $]-\infty ; 0]$
- concave sur $[0 ; +\infty[$.

PARTIE B

1. Déterminons f' sur $\mathbb{R}$:

La fonction $f(x) = \frac{1}{(1 + e^{-3x})}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, d'après l'énoncé.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{(0) \times (1 + e^{-3x}) - (1) \times (-3\, e^{-3x})}{[1 + e^{-3x}]^2}$

$$\left(\frac{U' \times (1 + e^V) - U \times (V' e^V)}{V^2} \right)$$

$$= \frac{3\, e^{-3x}}{[1 + e^{-3x}]^2}.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{3\, e^{-3x}}{[1 + e^{-3x}]^2}$.

2. Justifions que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$:

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $[1 + e^{-3x}]^2 > 0$ et $e^{-3x} > 0$.

Dans ces conditions: $\dfrac{3\,e^{-3x}}{[1 + e^{-3x}]^2} > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Ainsi: f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3. a. Déterminons la limite en $+\infty$ de la fonction f:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 + \dfrac{1}{e^{3x}}}.$$

Or d'après le cours: • $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{3x}} = 0.$

Dans ces conditions: $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{1+0} = 1.$

3. b. Déterminons la limite en $-\infty$ de la fonction f:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{X \to +\infty} \frac{1}{1 + e^{X}},$$ avec: $X = -3x$.

Or d'après le cours: • $\displaystyle\lim_{X \to +\infty} e^{X} = +\infty.$

Dans ces conditions: $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{1}{1 + (+\infty)} = 0.$

4. Déterminons la valeur exacte de la solution α de l'équation $f(x) = 0,99$:

$f(x) = 0,99 \iff \dfrac{1}{1 + e^{-3x}} = 0,99$

$$\iff 0,99 + 0,99\, e^{-3x} = 1$$

$$\iff e^{-3x} = 0,0101$$

$$\iff x = \frac{\ln(0,0101)}{-3}$$

cad: $x \approx 1,53$.

La valeur de la solution α de l'équation $f(x) = 0,99$ est environ égale à:

1,53.

PARTIE C

1. Déterminons une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point $A\left(0; \frac{1}{2}\right)$:

L'équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point $A\left(0; \frac{1}{2}\right)$ s'écrit:

$$y = f'(x_A) \times (x - x_A) + f(x_A)$$

$$\iff y = f'(0) \times x + \frac{1}{2}$$

cad: $y = \left(\frac{3 \times e^0}{[1 + e^0]^2}\right) \times x + \frac{1}{2}$

ou: $y = \frac{3}{4} x + \frac{1}{2}$.

Ainsi l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point A est: $y = \frac{3}{4} x + \frac{1}{2}$.

2. Étudions le signe de f'' sur $\mathbb{R}$:

Ici: • $f''(x) = \dfrac{9\,e^{-3x}(e^{-3x} - 1)}{[1 + e^{-3x}]^3} = \dfrac{3\,(e^{-3x} - 1)}{(1 + e^{-3x})} \times f'(x)$

• $\mathcal{D}f'' = \mathbb{R}$.

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$: • $f'(x) > 0$

• $1 + e^{-3x} > 0$

• $3 > 0$.

Donc le signe de f'' dépend uniquement du signe de $(e^{-3x} - 1)$.

Distinguons deux cas: • $e^{-3x} - 1 \geqslant 0$ ssi $-3x \geqslant 0$ cad $x \in]-\infty; 0]$,

• $e^{-3x} - 1 \leqslant 0$ ssi $-3x \leqslant 0$ cad $x \in [0; +\infty[$.

Au total: • $f''(x) \geqslant 0$ sur $]-\infty; 0]$,

• $f''(x) \leqslant 0$ sur $[0; +\infty[$.

3. a. Indiquons sur quels intervalles f est convexe:

D'après le cours: • f est concave sur I ssi $f''(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in I$

• f est convexe sur I ssi $f''(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$.

Donc ici: • f est convexe sur $]-\infty; 0]$,

• f est concave sur $[0; +\infty[$.

3. b. Que représente le point A pour la courbe $\mathcal{C}_f$?

En A, la fonction f'' s'annule et change de signe: le point A est donc un point d'inflexion pour $\mathcal{C}_f$.

4. Déduisons-en la position relative de la tangente T et de la courbe $\mathcal{C}_f$:

Tantôt au-dessus ($]-\infty\,;0[$), tantôt au-dessous ($]0\,;+\infty[$).