BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 1

CENTRES ÉTRANGERS 2
2023

$g(x) = \ln(x^2) + x - 2$

CORRECTION

PARTIE A

1. Déterminons les limites de la fonction g en " 0^+ " et " $+\infty$ ":

Ici: • $g(x) = \ln(x^2) + x - 2$ ($\ln(U) + V$)

• $\mathcal{D}g =]0; +\infty[$.

• $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$?

$\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x^2) + x - 2$

$= \lim\limits_{x \to 0^+} 2\ln(x) + x - 2$.

Or d'après le cours: • $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$

• $\lim\limits_{x \to 0^+} x = 0$.

Dans ces conditions: $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = 2 \times (-\infty) + (0 - 2) = -\infty$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$?

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln(x^2) + x - 2$$

$$= \lim_{x \to +\infty} 2\ln(x) + x - 2.$$

Or d'après le cours: • $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty.$

Dans ces conditions: $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 2 \times (+\infty) + (+\infty - 2) = +\infty.$

2. Étudions les variations de la fonction g sur $]0; +\infty[$:

- Calculons g' sur $]0; +\infty[$:

La fonction $g(x) = \ln(x^2) + x - 2$ est dérivable sur $]0; +\infty[$, d'après l'énoncé.

Ainsi, nous pouvons calculer g' pour tout $x \in]0; +\infty[$.

Pour tout $x \in]0; +\infty[$: $g'(x) = \dfrac{2x}{x^2} + 1$ $\left(\dfrac{u'}{u} + v'\right)$

$$= \frac{2 + x}{x}.$$

Ainsi, pour tout $x \in]0; +\infty[$: $g'(x) = \dfrac{2 + x}{x}.$

- Étudions le signe de $g'(x)$ sur $]0; +\infty[$:

Comme $x \in]0; +\infty[$, pour tout $x \in]0; +\infty[$: $g'(x) > 0.$

Ainsi, pour tout $x \in]\,0\,;+\infty\,[$: g est strictement croissante.

• **Dressons le tableau de variations de g sur $]\,0\,;+\infty\,[$:**

Le tableau de variations de la fonction g sur $]\,0\,;+\infty\,[$ est:

x	0		$+\infty$
g'	||	$+$	
g	|| $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3. a. Montrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]\,0\,;+\infty\,[$:

Nous allons appliquer le **corollaire** du théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

D'après le corollaire du TVI: **Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $I = [\,a\,;b\,]$ ou $I =]\,a\,;b\,[$ ($a < b$). Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans I.**

Ici: • g est continue sur $]\,0\,;+\infty\,[$,

• " $k = 0$ " est compris entre: $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = -\infty < 0$

et: $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty > 0$,

• g est strictement croissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

Ainsi, d'après le corollaire du TVI, l'équation $g(x) = 0$ ($k = 0$) admet bien une unique solution α appartenant à $]0 ; +\infty[$.

3. b. Donnons un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}:

A l'aide d'une calculatrice, nous trouvons: $1,37 \leqslant \alpha \leqslant 1,38$.

4. Déduisons-en le tableau de signe de la fonction g sur $]0 ; +\infty[$:

Nous pouvons en déduire le signe de la fonction g via le tableau suivant:

x	0			α		$+\infty$
g'	‖		$+$		$+$	
g	‖	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$
Signe de g	‖		$-$	0	$+$	

PARTIE B

1. a. Déterminons la limite de la fonction f en 0:

Ici: • $f(x) = \dfrac{(x-2)}{x} \ln(x)$ $\left(\dfrac{U}{V} \times \ln(W) \right)$

• $\mathcal{D}f =]0 ; +\infty[$.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left[\frac{x-2}{x} \right] \times [\ln(x)].$$

Or d'après le cours: • $\lim_{x \to 0^+} \frac{x-2}{x} = \lim_{x \to 0^+} -\frac{2}{x} = -\infty$

• $\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty.$

Dans ces conditions: $\lim_{x \to 0^+} f(x) = (-\infty) \times (-\infty) = +\infty.$

1. b. Interprétons graphiquement le résultat:

Nous savons que si $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale en " a " d'équation $x = a$.

Donc ici, $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale en " 0^+ " d'équation: $x = 0$.

2. Déterminons la limite de la fonction f en $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x-2}{x} \right) \times \ln(x)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{2}{x} \right) \times \ln(x).$$

Or d'après le cours: • $\lim_{x \to +\infty} -\frac{2}{x} = 0$

• $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty.$

Dans ces conditions: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = (1 - 0) \times (+\infty) = +\infty.$

3. **Montrons que pour tout $x \in]\,0\,;+\infty\,[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$:**

La fonction $f(x) = \dfrac{(x-2)}{x} \ln(x)$ est dérivable sur $]\,0\,;+\infty\,[$, d'après l'énoncé.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in]\,0\,;+\infty\,[$.

Pour tout $x \in]\,0\,;+\infty\,[$:

$$f'(x) = \left[\frac{(1) \times (x) - (x-2) \times (1)}{x^2}\right] \times (\ln(x)) + \left[\frac{(x-2)}{x}\right] \times \left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\left(\left[\frac{U' \times V - U \times V'}{V^2}\right] \times (\ln(W)) + \left[\frac{U}{V}\right] \times \left(\frac{W'}{W}\right)\right)$$

$$= \frac{2\ln(x)}{x^2} + \frac{x-2}{x^2}$$

$$= \frac{\ln(x^2) + x - 2}{x^2}$$

$$= \frac{g(x)}{x^2}.$$

Ainsi, pour tout $x \in]\,0\,;+\infty\,[$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

4. **Déduisons-en les variations de la fonction f sur $]\,0\,;+\infty\,[$:**

Comme $x^2 > 0$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$, le signe de f' est égal au signe de la fonction g sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

Or (PARTIE A, 4.): • $g(x) < 0$ sur $]\,0\,;\alpha\,[$

• $g(x) > 0$ sur $]\alpha ; +\infty[$.

Ainsi: • f est strictement décroissante sur $]0 ; \alpha[$,

• f est strictement croissante sur $]\alpha ; +\infty[$.

PARTIE C

Étudions la position relative de $\mathscr{C}f$ et de la courbe représentative de la fonction " ln " sur $]0 ; +\infty[$:

Soit la fonction: $d(x) = f(x) - \ln(x)$.

$d(x) = \dfrac{(x-2)}{x} \ln(x) - \ln(x)$ cad $d(x) = \dfrac{-2\ln(x)}{x}$.

Pour répondre à la question posée, nous devons étudier le signe de la fonction $d(x) = \dfrac{-2\ln(x)}{x}$, sachant que $x > 0$.

Donc le signe de $d(x)$ dépend du signe de " $-2\ln(x)$ ".

Distinguons deux cas: • si $x \in]0 ; 1]$, $-2\ln(x) \geqslant 0$ et donc $d(x) \geqslant 0$

• si $x \in [1 ; +\infty[$, $-2\ln(x) \leqslant 0$ et donc $d(x) \leqslant 0$.

Ainsi: • sur $]0 ; 1[$, $\mathscr{C}f$ est au-dessus de la courbe représentative de la fonction " ln "

• sur $]1 ; +\infty[$, $\mathscr{C}f$ est au-dessous de la courbe représentative de la fonction " ln ".