BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 3

AMÉRIQUE DU SUD

2022

$g(x) = 1 + x^2(1 - 2\ln(x))$

CORRECTION

PARTIE A

1. Justifions que g (e) est strictement négatif :

Pour cela nous allons calculer $g(e)$.

Ici : • $g(x) = 1 + x^2(1 - 2\ln(x))$ $(U + V \times (U - 2\ln(W)))$

• $\mathcal{D}g =]0 ; +\infty[$.

$g(e) = 1 + (e)^2 \times (1 - 2\ln(e)) = 1 - e^2 < 0$ car $e > 2$ et donc $e^2 > 4$.

D'où nous avons bien : $g(e) < 0$.

2. Justifions que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$:

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 + x^2(1 - 2\ln(x))$.

Or d'après le cours : • $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 = 1$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty.$

Dans ces conditions: $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1 + (+\infty) \times (1 - 2 \times (+\infty))$

$= (+\infty) \times (-\infty)$

$= -\infty.$

3. a. Montrons que pour tout $x \in]0;+\infty[$, $g'(x) = -4x\ln(x)$:

D'après l'énoncé, g est dérivable sur $]0;+\infty[$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer g' pour tout $x \in]0;+\infty[$.

Pour tout $x \in]0;+\infty[$: $g'(x) = 0 + (2x) \times (1 - 2\ln(x)) + (x^2) \times \left(0 - \frac{2}{x}\right)$

$\left(U' + V' \times (U - 2\ln(W)) + V \times \left(U' - 2 \times \frac{W'}{W}\right)\right)$

$= 2x(1 - 2\ln(x)) - 2x$

$= -4x\ln(x).$

Ainsi la dérivée g' de g sur $]0;+\infty[$ est bien: $g'(x) = -4x\ln(x).$

3. b. Étudions le sens de variation de la fonction g sur $]0;+\infty[$:

Distinguons deux cas pour tout x strictement positif.

1er cas: $g'(x) \leq 0.$

$g'(x) \leq 0 \iff -4x\ln(x) \leq 0 \iff -\ln(x) \leq 0$ car $x \in]0;+\infty[$

$\iff \ln(x) \geq 0$ cad $x \in [1;+\infty[.$

2ᵉ cas: $g'(x) \geq 0$.

$g'(x) \geq 0 \iff -4x \ln(x) \geq 0 \iff -\ln(x) \geq 0$ car $x \in]0; +\infty[$

$\iff \ln(x) \leq 0$ cad $x \in]0; 1]$.

Au total: • g est croissante sur $]0; 1]$,

• g est décroissante sur $[1; +\infty[$.

Notons que: le point $(1; g(1))$ est le maximum de g sur $]0; +\infty[$.

3. c. Montrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]1; +\infty[$:

D'après le corollaire du TVI: Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $I = [a; b]$ ou $I =]a; b[$ ($a < b$). Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans I.

Ici: • g est continue sur $]0; +\infty[$, donc sur $]1; +\infty[$,

• " $k = 0$ " est compris entre: $g(1) = 2 > 0$

et: $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty < 0$,

• g est strictement décroissante sur $]1; +\infty[$.

Ainsi, d'après le corollaire du TVI, l'équation $g(x) = 0$ ($k = 0$) admet bien une unique solution α appartenant à $]1; +\infty[$.

3. d. Donnons un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}:

A l'aide d'une calculatrice, nous trouvons: $1,89 \leq \alpha \leq 1,90$.

4. Déduisons-en le signe de la fonction g sur $[\ 1 ; +\infty\ [$:

Nous pouvons en déduire le signe de la fonction g sur $[\ 1 ; +\infty\ [$:

x	1		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

En effet: • $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in [\ 1 ; \alpha\ ]$

• $g(x) \leq 0$ pour tout $x \in [\ \alpha ; +\infty\ [$.

PARTIE B

1. Justifions que la fonction g est concave sur $[\ 1 ; \alpha\ ]$:

D'après le cours, g est concave sur un intervalle I ssi:

$g''(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$.

Or ici, pour tout $x \in [\ 1 ; \alpha\ ]$: $g''(x) = -4\ (\ln(x) + 1)$.

Et sur $[\ 1 ; \alpha\ ]$, $\ln(x) + 1 > 0$ car $\ln(x) \geq 0$.

Donc sur $[\ 1 ; \alpha\ ]$, $-4\ (\ln(x) + 1) < 0$ et par conséquent: g est strictement concave sur $[\ 1 ; \alpha\ ]$.

2. a. Déterminons l'équation réduite de la droite (AB):

Ici: A (1 ; 2) et B (α ; 0), car g (α) = 0.

L'équation réduite de la droite (AB) est:

$$y = \left(\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\right) \times (x - x_A) + g(x_A)$$

$$\Longleftrightarrow \quad y = \left(\frac{0 - 2}{\alpha - 1}\right) \times (x - 1) + 2$$

$$\text{cad:} \quad y = \frac{-2}{\alpha - 1}(x - 1) + 2.$$

L'équation réduite de la droite (AB) est donc: $y = \frac{-2}{\alpha - 1}(x - 1) + 2.$

2. b. Déduisons-en que pour tout $x \in [\,1 ; \alpha\,]$, $g(x) \geqslant \left(\frac{-2}{\alpha - 1}\right)x + \frac{2\alpha}{\alpha - 1}$:

$$g(x) \geqslant \left(\frac{-2}{\alpha - 1}\right)x + \frac{2\alpha}{\alpha - 1} \quad \Longleftrightarrow \quad g(x) \geqslant \frac{-2}{\alpha - 1}(x - 1) + 2.$$

Comme la fonction g est concave sur $[\,1 ; \alpha\,]$: sa courbe représentative est donc située au-dessus de toute sécante, donc au-dessus du segment [AB].

Ainsi nous pouvons affirmer que pour tout $x \in [\,1 ; \alpha\,]$:

$$g(x) \geqslant \left(\frac{-2}{\alpha - 1}\right)x + \frac{2\alpha}{\alpha - 1}.$$