# BACCALAURÉAT
# MATHÉMATIQUES

## SUJET 2

## CORRIGÉ EXERCICE 2

## ASIE

## 2022

# $f(x) = \ln(x^2 - x - 6)$

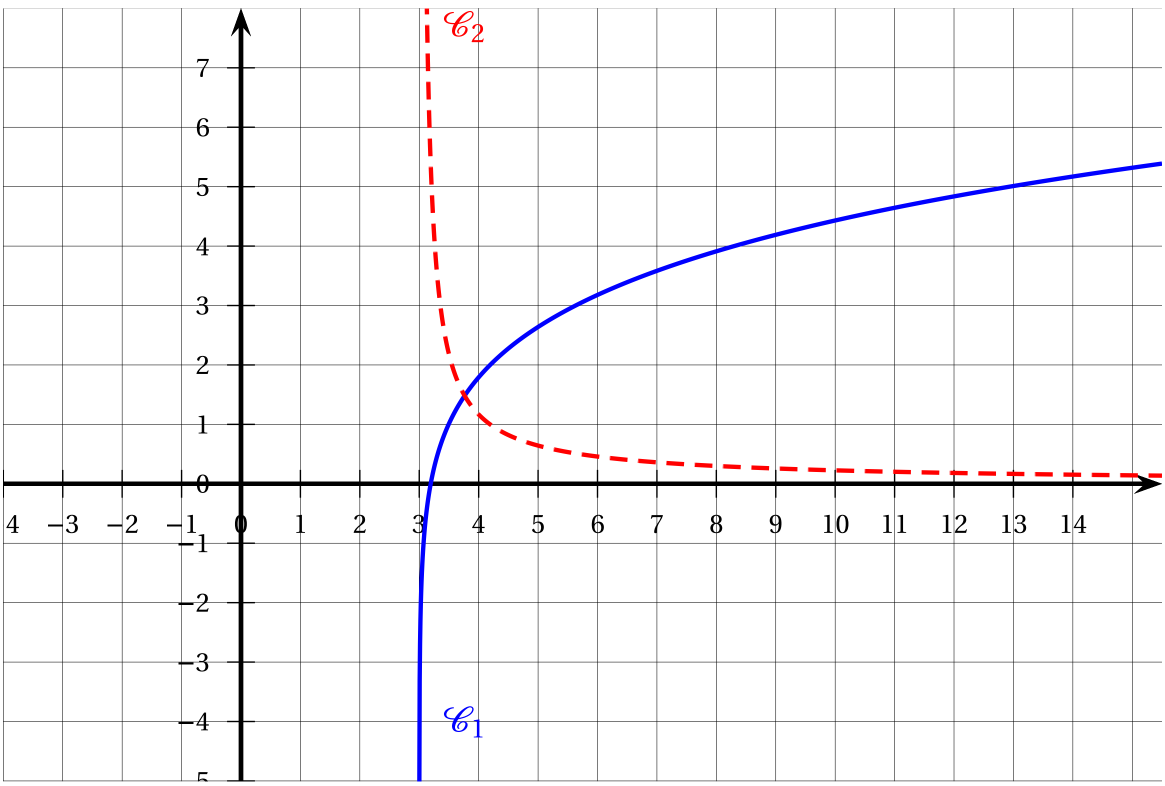
## CORRECTION

## PARTIE A



**1. Associons à chaque courbe la fonction qu'elle représente:**

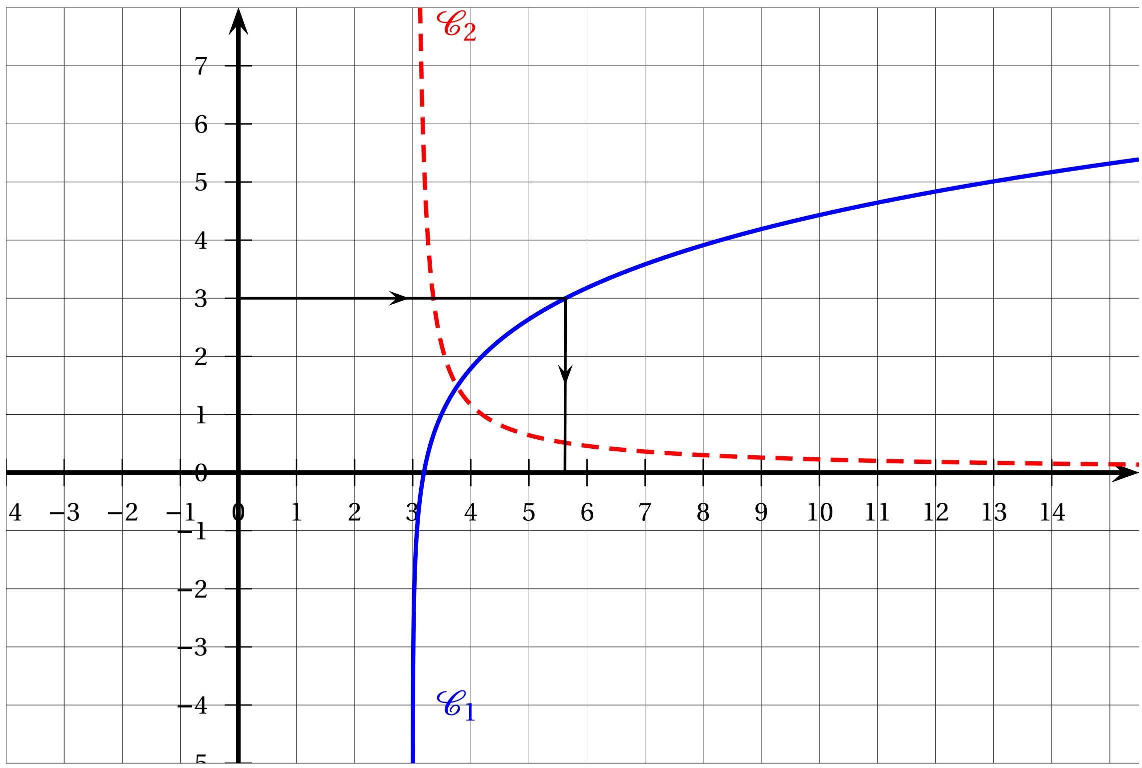
Sur le graphique et sur l'intervalle $]\, 3 \,;\, +\infty \,[$, sont représentées les courbes représentatives de la fonction $f$ et de sa dérivée $f\,'$.



Nous pouvons affirmer que:
- $\mathscr{C}_1$ représente la courbe représentative de la fonction $f$,
- $\mathscr{C}_2$ représente la courbe représentative de la dérivée $f'$ de $f$.

2. Déterminons graphiquement la solution de l'équation $f(x) = 3$:

Graphiquement (partie noire avec flèches), l'équation $f(x) = 3$ admet une seule solution: $x \approx 5,7$.




Graphiquement, la solution de l'équation $f(x) = 3$ est: $x \approx 5,7$.

3. Indiquons, par lecture graphique, la convexité de la fonction $f$:

D'après le graphique, il est clair que: la courbe $\mathscr{C}_f$ est concave par rapport à l'origine.

Ainsi: $f$ est concave sur $]3; +\infty[$.

# PARTIE B

1. Montrons que la fonction $f$ est bien définie sur $I = ]\,3\,; +\infty\,[$:

Ici: • $f(x) = \ln(x^2 - x - 6)$ $(\ln(U))$

• $\mathcal{D}f = ?$

L'ensemble de définition de $f$ est tel que: $x^2 - x - 6 > 0$.

Soit l'équation: $x^2 - x - 6 = 0$. $(ax^2 + bx + c = 0)$

Calcul du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$:

$\Delta = (-1)^2 - 4\,(1 \times (-6)) = 25 > 0$.

Les solutions ?

Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions distinctes:

• $x_1 = \dfrac{1 - 5}{2} = -2$

• $x_2 = \dfrac{1 + 5}{2} = 3$.

Ainsi: $x^2 - x - 6 > 0$ ssi $x \in ]-\infty\,; -2\,[\, \cup \,]\,3\,; +\infty\,[ = \mathcal{D}f$.

Dans ces conditions, nous pouvons affirmer que: la fonction $f$ est bien définie sur $I = ]\,3\,; +\infty\,[$.

2. a. Calculons les limites de $f$ en " 3 " et " $+\infty$ ":

a1. Limite de la fonction $f$ en " 3 ":

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} \ln(x^2 - x - 6)$$

$$= \lim_{X \to 0^+} \ln(X), \text{ en posant } X = x^2 - x - 6.$$

Or d'après le cours: • $\lim_{X \to 0^+} \ln(X) = -\infty$.

Dans ces conditions: $\lim_{x \to 3^+} f(x) = -\infty$.

**a2. Limite de la fonction $f$ en $+\infty$:**

En $+\infty$, la fonction $f$ peut s'écrire: $f(x) = \ln\left(x^2\left[1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}\right]\right)$

$$= \ln(x^2) + \ln\left[1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}\right] \quad (x \neq 0).$$

D'où: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln(x^2) + \lim_{x \to +\infty} \ln\left[1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}\right]$.

Or d'après le cours: • $\lim_{x \to +\infty} \ln(x^2) = \lim_{x \to +\infty} 2\ln(x) = +\infty$

• $\lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{x} = \lim_{x \to +\infty} -\frac{6}{x^2} = 0$.

Dans ces conditions: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty + \ln[1 + 0 + 0] = +\infty$.

**b. Déduisons-en une équation d'une asymptote à la courbe représentative de la fonction $f$ sur $I$:**

Comme $\lim_{x \to 3^+} f(x) = -\infty$, la courbe représentative de $f$ sur $I$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 3$.

**3. a. Calculons $f'(x)$ pour tout $x \in I$:**

La fonction $f(x) = \ln(x^2 - x - 6)$ est dérivable sur $I$ comme composée de deux fonctions dérivables sur $I = ]3 ; +\infty[$.

Ainsi, nous pouvons calculer $f'$ pour tout $x \in ]3 ; +\infty[$.

Pour tout $x \in ]3 ; +\infty[$: $f'(x) = \dfrac{2x - 1}{x^2 - x - 6}$ $\left(\dfrac{u'}{u}\right)$.

La dérivée de la fonction $f$ pour tout $x \in I$ est donc: $f'(x) = \dfrac{2x - 1}{x^2 - x - 6}$.

**3. b. b1. Étudions le sens de variation de $f$ sur $I$:**

Distinguons deux cas pour tout $x \in I$, sachant que le signe de $f'$ **dépend uniquement du signe de $2x - 1$** car $x^2 - x - 6 > 0$.

1er cas: $f'(x) \leqslant 0$.

$f'(x) \leqslant 0 \iff 2x - 1 \leqslant 0$ cad $x \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Or nous sommes dans $I = ]3 ; +\infty[$.

Donc ce cas est à rejeter.

2e cas: $f'(x) \geqslant 0$.

$f'(x) \geqslant 0 \iff 2x - 1 \geqslant 0$ cad $x \geqslant \dfrac{1}{2}$ ou $x \in \left[\dfrac{1}{2} ; +\infty\right[$.

Comme $\left[\dfrac{1}{2} ; +\infty\right[$ est inclus dans $I$: la fonction $f$ est strictement croissante sur $I = ]3 ; +\infty[$.

3. b. b2. Dressons le tableau de variations de la fonction $f$ sur $I$:

Le tableau de variations de la fonction $f$ sur $I$ est:

| $x$ | $3$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'$ | $\|\|$ $\qquad$ $+$ |
| $f$ | $\|\|$ $-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$ |

4. a. Justifions que l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution $\alpha$ sur $]5\,;6[$:

Nous allons appliquer le **corollaire** du théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

D'après le corollaire du TVI: Soit $f$ une fonction continue et strictement monotone sur $I = [a\,; b]$ ou $I = ]a\,; b[$ ($a < b$). Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $I$.

Ici:
- $f$ est continue sur $]3\,; +\infty[$, donc sur $]5\,; 6[$
- " $k = 3$ " est compris entre: $f(5) = \ln(14) < 3$

  et: $f(6) = \ln(24) > 3$
- $f$ est strictement croissante sur $]5\,; 6[$.

Ainsi, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 3$ ($k = 3$) admet bien une unique solution $\alpha$ appartenant à $]5\,; 6[$.

4. b. A l'aide d'une calculatrice, déterminons un encadrement de $\alpha$:

A l'aide d'une calculatrice, un encadrement de $\alpha$ à $10^{-2}$ près est:

$$5,63 < \alpha < 5,64.$$

5. a. Calculons $f''(x)$ sur $I = ]3\,;+\infty[$:

Ici: • $f'(x) = \dfrac{2x - 1}{x^2 - x - 6}$ $\left(\dfrac{u}{v}\right)$

• $I = ]3\,;+\infty[$.

La fonction $f'(x) = \dfrac{2x - 1}{x^2 - x - 6}$ est dérivable sur $I$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $I$, avec $x^2 - x - 6 \neq 0$ pour tout $x \in I$.

Ainsi, nous pouvons calculer $f''$ pour tout $x \in I$.

Pour tout $x \in I$: $f''(x) = \dfrac{(2) \times (x^2 - x - 6) - (2x - 1) \times (2x - 1)}{(x^2 - x - 6)^2}$

$$\left(\frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}\right)$$

$$= \frac{2x^2 - 2x - 12 - (2x - 1)^2}{(x^2 - x - 6)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 2x - 12 - (4x^2 + 1 - 4x)}{(x^2 - x - 6)^2}$$

$$= \frac{-2x^2 + 2x - 13}{(x^2 - x - 6)^2}.$$

La dérivée seconde de $f$ sur $I$ est: $f''(x) = \frac{-2x^2 + 2x - 13}{(x^2 - x - 6)^2}$.

5. b. Étudions la convexité de $f$ sur $I$:

D'après le cours: • $f$ est concave sur $I$ ssi $f''(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$

• $f$ est convexe sur $I$ ssi $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.

Ici: $f''(x) = \frac{-2x^2 + 2x - 13}{(x^2 - x - 6)^2}$ pour tout $x \in I$.

Notons que le signe de $f''$ dépend uniquement du signe de $-2x^2 + 2x - 13$ car $(x^2 - x - 6)^2 > 0$ sur $I$.

Soit l'équation: $-2x^2 + 2x - 13 = 0$. $( ax^2 + bx + c = 0 )$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= 4 - 4 \times ( (-2) \times (-13) )$

$= -100 < 0$.

Comme $\Delta < 0$, l'équation n'admet aucune racine dans $I$.

Dans ces conditions: $-2x^2 + 2x - 13 < 0$ car $a = -2 < 0$.

Au total, comme $-2x^2 + 2x - 13 < 0$, $f''(x) < 0$ et par conséquent: la fonction $f$ est strictement concave sur $I$.