

www.freemaths.fr

BACCALAURÉAT MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ
EXERCICE 4 

ASIE
2022

$$f(x) = \ln(ax^2 + 1) + b$$

CORRECTION

PARTIE A

1. Déterminons graphiquement $f(1)$ et $f'(1)$:

Ici: • $A(1; 3)$ et $B(3; 5)$

• $\mathcal{D}f = \mathbb{R}$.

Graphiquement, nous trouvons: $f(1) = 3$.

Quant à $f'(1)$: $f'(1) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ cad $f'(1) = \frac{5 - 3}{3 - 1} = 1$.

Ainsi: $f(1) = 3$ et $f'(1) = 1$.

2. a. Déterminons l'expression de $f'(x)$:

Ici: • $f(x) = \ln(ax^2 + 1) + b$, $a > 0$ et $b > 0$ ($\ln(U) + V$)

• $\mathcal{D}f = \mathbb{R}$.

D'après l'énoncé f est dérivable sur \mathbb{R} .

Dans ces conditions, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}: f'(x) = \frac{2ax}{ax^2+1} + 0 \quad \left(\frac{u'}{u} + v' \right)$$

$$= \frac{2ax}{ax^2+1}$$

$$\text{Ainsi, pour tout } x \in \mathbb{R}: f'(x) = \frac{2ax}{ax^2+1}$$

2. b. Déterminons les valeurs de a et b :

D'après les questions précédentes, nous savons que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet f(x) = \ln(ax^2 + 1) + b \\ \bullet f'(x) = \frac{2ax}{ax^2 + 1} \\ \bullet f(1) = 3 \\ \bullet f'(1) = 1 \end{array} \right.$$

D'où, nous pouvons poser le système suivant:

$$\begin{cases} f(1) = 3 \\ f'(1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(a+1) + b = 3 \\ \frac{2a}{a+1} = 1 \end{cases} \quad (\text{car: } x=1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 - \ln(a+1) \\ 2a = a+1 \end{cases}$$

$$\text{cad } \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 - \ln(2) \end{cases}$$

Au total: • $a = 1$ et $b = 3 - \ln(2)$

• $f(x) = \ln(x^2 + 1) + (3 - \ln(2))$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

PARTIE B

1. Montrons que f est une fonction paire:

Ici: • $f(x) = \ln(x^2 + 1) + (3 - \ln(2))$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ $(\ln(U) + V)$

• $x \in \mathbb{R}$ et $-x \in \mathbb{R}$.

Nous avons: $f(-x) = \ln((-x)^2 + 1) + (3 - \ln(2))$

$$= \ln(x^2 + 1) + (3 - \ln(2))$$

$$= f(x).$$

Comme $f(-x) = f(x)$: f est une fonction paire.

2. a. Déterminons la limite de la fonction f en $+\infty$:

En $+\infty$, la fonction f peut s'écrire:

$$f(x) = \ln\left(x^2 \left[1 + \frac{1}{x^2}\right]\right) + (3 - \ln(2)). \quad (x \neq 0)$$

$$\text{D'où: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2) + \ln\left[1 + \frac{1}{x^2}\right] + (3 - \ln(2))$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \ln(x) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left[1 + \frac{1}{x^2}\right] + \lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - \ln(2)).$$

Or d'après le cours: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - \ln(2)) = 3 - \ln(2).$$

Dans ces conditions: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2x(+\infty) + \ln[1+0] + 3 - \ln(2) = +\infty.$

2. b. Déterminons la limite de la fonction f en $-\infty$:

Comme f est une fonction paire: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$= +\infty.$$

3. a. Calculons $f'(x)$:

D'après l'énoncé f est dérivable sur \mathbb{R} .

Dans ces conditions, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}: f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} + 0 \quad \left(\frac{u'}{u} + v' \right)$$

$$= \frac{2x}{x^2+1}.$$

$$\text{Ainsi, pour tout } x \in \mathbb{R}: f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}.$$

3. b. Étudions le sens de variation de f sur \mathbb{R} :

Distinguons deux cas pour tout $x \in \mathbb{R}$, sachant que $x^2 + 1 > 0$.

1^{er} cas: $f'(x) \leq 0$.

$$f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow 2x \leq 0 \text{ cad } x \leq 0 \text{ ou } x \in]-\infty; 0].$$

2^e cas: $f'(x) \geq 0$.

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 0 \text{ cad } x \geq 0 \text{ ou } x \in [0; +\infty[.$$

Ainsi: • f est décroissante sur $]-\infty; 0]$,

• f est croissante sur $[0; +\infty[$.

3. c. Dressons le tableau de variations de f sur \mathbb{R} :

Le tableau de variations de la fonction f sur \mathbb{R} est:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	a	b	c

Diagramme du tableau de variations: une flèche descendante relie a à b , et une flèche ascendante relie b à c .

Avec: • $a = +\infty$

• $b = f(0) = 3 - \ln(2)$ (minimum de f sur \mathbb{R})

• $c = +\infty$.

4. Donnons les valeurs du réel k telles que $f(x) = k$ admet 2 solutions:

D'après le tableau de variations, $f(x) = k$ admet deux solutions ssi:

$$k > 3 - \ln(2).$$

5. Résolvons l'équation $f(x) = 3 + \ln(2)$:

$$f(x) = 3 + \ln(2) \Leftrightarrow \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln(2) = 3 + \ln(2)$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^2 + 1) = 2 \ln(2)$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^2 + 1) = \ln(4)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 1 = 4$$

$$\text{cad } x = -\sqrt{3} \text{ ou } x = \sqrt{3}.$$

D'où l'équation $f(x) = 3 + \ln(2)$ admet deux solutions distinctes:

$$-\sqrt{3} \text{ et } \sqrt{3}.$$

PARTIE C

1. Conjecturons les abscisses des éventuels points d'inflexion de la courbe \mathcal{C}_f :

D'après le graphique, les éventuels points d'inflexion semble être: les points $C(-1; f(-1))$ et $D(1; f(1))$.

2. Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$.

Ici: $\bullet f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} \quad \left(\frac{U}{V} \right)$

$\bullet \mathcal{D}f' = \mathbb{R}$.

La fonction $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ est dérivable sur \mathbb{R} comme quotient de deux

fonctions dérivables sur \mathbb{R} , avec $x^2 + 1 \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Ainsi, nous pouvons calculer f'' pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } x \in \mathbb{R}: f''(x) &= \frac{(2) \times (x^2 + 1) - (2x) \times (2x)}{(x^2 + 1)^2} && \left(\frac{U' \times V - U \times V'}{V^2} \right) \\ &= \frac{2x^2 + 2 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}. \end{aligned}$$

La dérivée seconde de f sur \mathbb{R} est donc: $f''(x) = \frac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}$.

3. Déduisons-en le plus grand intervalle sur lequel f est convexe:

f est convexe sur un intervalle I ssi $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.

Ici: $f''(x) \geq 0 \iff 2(1 - x^2) \geq 0$ (car: $(x^2 + 1)^2 > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$)

$$\iff 1 - x^2 \geq 0$$

cad $x^2 \leq 1$ ou $x \in [-1; 1]$

Donc le plus grand intervalle sur lequel f est convexe: $[-1; 1]$