BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 3

CENTRES ÉTRANGERS 2

2022

$$g(x) = \frac{2\ln(x)}{x}$$

CORRECTION

PARTIE 1

1. Montrons que $g'(x) = \frac{2 - 2\ln(x)}{x^2}$, sur $]0;+\infty[$:

Ici: • $g(x) = \frac{2\ln(x)}{x}$ $\left(\frac{2\ln(U)}{V}\right)$

• $\mathcal{D}g =]0;+\infty[$.

La fonction $g(x) = \frac{2\ln(x)}{x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$, avec $x \neq 0$ pour tout $x \in]0;+\infty[$.

Ainsi, nous pouvons calculer g' pour tout $x \in]0;+\infty[$.

Pour tout $x \in]0;+\infty[$: $g'(x) = \frac{\left(2 \times \frac{1}{x}\right) \times (x) - (2\ln(x)) \times (1)}{x^2}$

$$\left(\frac{\left(2\left(\frac{U'}{U}\right) \times V\right) - (2\ln(U) \times V')}{V^2}\right)$$

$$= \frac{2 - 2\ln(x)}{x^2}.$$

Ainsi, pour tout $x \in]0; +\infty[$: $g'(x) = \frac{2 - 2\ln(x)}{x^2}$.

2. a. La valeur $\frac{2}{e}$?

Il s'agit de $g(e)$: $g(e) = \frac{2 \times \ln(e)}{e} = \frac{2}{e}$.

2. b. Les variations de la fonction g sur $]0; +\infty[$?

Pour répondre à cette question, nous allons étudier le signe de g' sur $]0; +\infty[$,

sachant que: $g'(x) = \frac{2 - 2\ln(x)}{x^2}$ et $x^2 > 0$.

Distinguons deux cas pour tout $x \in]0; +\infty[$.

1er cas: $g'(x) \leq 0$.

$g'(x) \leq 0 \iff 2 - 2\ln(x) \leq 0 \iff \ln(x) \geq 1$ cad $x \in [e; +\infty[$.

2e cas: $g'(x) \geq 0$.

$g'(x) \geq 0 \iff 2 - 2\ln(x) \geq 0 \iff \ln(x) \leq 1$ cad $x \in]0; e]$.

Ainsi:
- g est croissante sur $]0; e]$,
- g est décroissante sur $[e; +\infty[$.

2. c. Les limites de la fonction g en 0^+ et $+\infty$:

- $\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{2\ln(x)}{x}$

$$= \lim_{x \to 0^+} (2\ln(x)) \times \left(\frac{1}{x}\right).$$

Or d'après le cours: • $\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$

• $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$

Dans ces conditions: $\lim_{x \to 0^+} g(x) = 2 \times (-\infty) \times (+\infty) = -\infty.$

• $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2\ln(x)}{x}.$

Or d'après le cours: • $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$

Dans ces conditions: $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 2 \times 0 = 0.$

3. Déduisons-en le tableau de signes de la fonction g sur $]\,0\,;+\infty\,[$:

Le tableau de signes de la fonction g sur $]\,0\,;+\infty\,[$ est:

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	‖	-	0	+	

En effet: • $g(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in \,]\,0\,;1\,]$

• $g(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [\,1\,;+\infty\,[.$

PARTIE 2

1. Montrons que sur $]0;+\infty[$, f est une primitive de g:

Ici: • $g(x) = \dfrac{2\ln(x)}{x}$

• $\mathcal{D}g =]0;+\infty[$.

Notons que la fonction g est continue sur $]0;+\infty[$.

Elle admet donc une primitive sur $]0;+\infty[$ cad une fonction f sur $]0;+\infty[$, telle que: $f' = g$.

Pour tout $x \in]0;+\infty[$: $f(x) = [\ln(x)]^2$.

En effet, pour tout $x \in]0;+\infty[$: $f'(x) = 2 \times (\ln(x))^{(2-1)} \times \dfrac{1}{x}$

$$= \frac{2\ln(x)}{x}$$

$$= g(x).$$

Donc sur $]0;+\infty[$: f est bien une primitive de la fonction g.

2. a. Étudions la convexité de la fonction f :

D'après le cours: • f est concave sur I ssi $f''(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in I$

• f est convexe sur I ssi $f''(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$.

Ici comme f est une primitive de g sur $]0;+\infty[$, g correspond à la dérivée de f et g' correspond à la dérivée seconde de f.

Ainsi pour tout $x \in]\,0\,;+\infty\,[$, nous pouvons écrire:

- $f(x) = [\,\ln(x)\,]^2$

- $f'(x) = \dfrac{2\ln(x)}{x}$

- $f''(x) = \dfrac{1 - 2\ln(x)}{x^2}$.

Or: $\begin{cases} g'(x) \leqslant 0 \text{ sur } [\,e\,;+\infty\,[\\ g'(x) \geqslant 0 \text{ sur }]\,0\,;e\,] \end{cases} \iff \begin{cases} f''(x) \leqslant 0 \text{ sur } [\,e\,;+\infty\,[\\ f''(x) \geqslant 0 \text{ sur }]\,0\,;e\,] \end{cases}$.

Ainsi:
- f est concave sur $[\,e\,;+\infty\,[$,
- f est convexe sur $]\,0\,;e\,]$.

2. b. Étudions les variations de la fonction f :

Nous savons que le tableau de signes de la fonction g sur $]\,0\,;+\infty\,[$ est le suivant:

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

D'où nous pouvons dresser le tableau de variations de f sur $]\,0\,;+\infty\,[$:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x) = g(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ a	$\searrow$	b	$\nearrow$	c

Avec: • $a = \lim\limits_{x \to 0^+} (\ln(x))^2 = (-\infty)^2 = +\infty$

• $b = f(1) = 0$ (minimum de f sur $]0; +\infty[$)

• $c = \lim\limits_{x \to +\infty} (\ln(x))^2 = (+\infty)^2 = +\infty$.

3. a. Donnons une équation de la tangente à la courbe de f au point A $(e; f(e))$:

L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A $(e; f(e))$ s'écrit:

$$y = f'(x_A) \times (x - x_A) + f(x_A)$$

cad: $y = f'(e) \times (x - e) + f(e)$.

Or ici: • $f(x) = [\ln(x)]^2$,

• $f'(x) = \dfrac{2 \ln(x)}{x}$,

• $f(e) = 1$,

• $f'(e) = \dfrac{2}{e}$.

Dans ces conditions: $y = \frac{2}{e} \times (x - e) + 1$

cad: $y = \left(\frac{2}{e}\right)x - 1.$

L'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A (e ; f (e)) est donc:

$$y = \left(\frac{2}{e}\right)x - 1.$$

3. b. Déduisons-en que $[\ln(x)]^2 \geqslant \left(\frac{2}{e}\right)x - 1$, pour tout $x \in]\,0 ; e\,]$:

La courbe représentative de la fonction f admet un point d'inflexion en $x = e$.

Ainsi la tangente en ce point coupe la courbe $\mathscr{C}_f$.

Or à gauche du point d'abscisse $x = e$ ($x \in]\,0 ; e\,]$), la fonction f est convexe (Partie 2) et par conséquent la courbe $\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de cette tangente.

Dans ces conditions sur $]\,0 ; e\,]$: $[\ln(x)]^2 \geqslant \left(\frac{2}{e}\right)x - 1.$