BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 4

FRANCE MÉTROPOLITAINE
2023

$$f(x) = \ln(1 + e^{-x})$$

CORRECTION

1. a. Déterminons la limite de la fonction f en $-\infty$:

Ici: • $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$ $(\ln(U))$

• $\mathcal{D}f = \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right).$$

Or d'après le cours: • $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

• $\lim_{X \to +\infty} 1 + X = +\infty$

• $\lim_{Y \to +\infty} \ln(Y) = +\infty$.

Dans ces conditions: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{Y \to +\infty} \ln(Y) = +\infty$.

1. b. Déterminons la limite de la fonction f en $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (1 + e^{-x}).$$

Or d'après le cours: • $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim_{x \to -\infty} e^{x} = 0$.

Dans ces conditions: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ln(1 + 0) = 0.$

Et nous savons que si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = \ell$.

Donc ici, $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation: $y = 0$.

1. c. Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{-1}{1 + e^x}$:

La fonction $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après l'énoncé.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \dfrac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}}$ $\left(\dfrac{u'}{u}\right)$

$$= \frac{e^{-x}(-1)}{e^{-x}(e^x + 1)}$$

$$= \frac{-1}{1 + e^x}.$$

D'où pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \dfrac{-1}{1 + e^x}$.

1. d. Dressons le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$:

- **Étudions le signe de f' sur $\mathbb{R}$:**

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$.

Dans ces conditions, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\dfrac{-1}{1 + e^x} < 0$ cad $f'(x) < 0$.

Ainsi: f est strictement décroissante sur IR.

• **Dressons le tableau de variations de f sur IR:**

Le tableau de variations de la fonction f sur IR est:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	|	$-$	
f	a	$\searrow$	$\ln(2)$	$\searrow$	b

Avec: • $a = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

• $b = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

2. a. Déterminons une équation de la tangente T_0:

T_0 est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A(0; f(0))$ cad $A(0; \ln(2))$.

L'équation de T_0 s'écrit:

$$y = f'(x_A) \times (x - x_A) + f(x_A)$$

cad: $y = f'(x_A) \times (x - 0) + \ln(2)$.

Or ici: • $f'(x) = \dfrac{-1}{1 + e^x}$,

• $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

Dans ces conditions: $y = -\frac{1}{2} \times (x - 0) + \ln(2)$

cad: $y = -\frac{1}{2}x + \ln(2)$.

L'équation de la tangente T_0 est donc: $y = -\frac{1}{2}x + \ln(2)$.

2. b. Montrons que la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$:

D'après le cours:
• f est concave sur I ssi $f''(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$
• f est convexe sur I ssi $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.

Pour répondre à la question, nous allons étudier le signe de f'' sur $\mathbb{R}$.

Or pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{-1}{1 + e^x}$.

Et donc pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f''(x) = \frac{0 \times (1 + e^x) - (-1) \times (e^x)}{(1 + e^x)^2}$

$$= \frac{e^x}{(1 + e^x)^2}.$$

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$: $f''(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$.

Ainsi: f est convexe, et même strictement convexe, sur $\mathbb{R}$.

2. c. Déduisons-en que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq -\frac{1}{2}x + \ln(2)$:

Comme la fonction f est **convexe**: **la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de toutes ses tangentes**, et en particulier **au-dessus de la tangente T_0**.

Donc $\mathcal{C}_f$ étant au-dessus de T_0, nous pouvons écrire pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) \geqslant -\frac{1}{2}x + \ln(2).$$

3. a. Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - f(-x) = -x$:

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: • $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$

• $f(-x) = \ln(1 + e^{x})$.

Dans ces conditions: $\boldsymbol{f(x) - f(-x)} = \ln(1 + e^{-x}) - \ln(1 + e^{x})$

$$= \ln\left(\frac{1 + e^{-x}}{1 + e^{x}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{e^{-x}(e^{x} + 1)}{1 + e^{x}}\right)$$

$$= \ln(e^{-x})$$

$$= -x.$$

Au total, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) - f(-x) = -x$.

3. b. Déduisons-en que les droites T_0 et (M_aN_a) sont parallèles:

Les droites T_0 et (M_aN_a) sont parallèles ssi elles ont le même coefficient directeur.

Or le coefficient directeur de T_0 est: $-\frac{1}{2}$ $\left(y = -\frac{1}{2}x + \ln(2)\right)$.

Et celui de la droite (MaNa) est: $\dfrac{f(a)-f(-a)}{a-(-a)} = \dfrac{-a}{2a} = -\dfrac{1}{2}$.

Ainsi, les droites T_0 et (MaNa) sont bien parallèles.