BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 4

FRANCE MÉTROPOLITAINE

2022

$$g(x) = (-0,15x + 2,2)\, e^{0,2x} - 2,2$$

CORRECTION

PARTIE A

1. a. Justifions la limite de f en $+\infty$:

Ici: • $f(x) = 0,06\,(-x^2 + 13,7x)$ (U)

• $\mathcal{D}f = [\,0 ; +\infty\,[$.

En $+\infty$, la fonction f peut s'écrire: $f(x) = 0,06x^2 \times \left[-1 + \dfrac{13,7}{x}\right]$. $(x \neq 0)$

D'où: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 0,06x^2 \times \left[-1 + \dfrac{13,7}{x}\right]$.

Or d'après le cours: • $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} -1 = -1$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{13,7}{x} = 0$.

Dans ces conditions: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0,06 \times (+\infty) \times [-1 + 0] = -\infty$.

1. b. Justifions les variations de la fonction f sur $[\,0;+\infty\,[$:

• Calculons f' sur $[\,0;+\infty\,[$:

La fonction $f(x) = 0,06\,(-x^2 + 13,7x)$ est dérivable sur IR comme fonction polynôme, donc dérivable sur $[\,0;+\infty\,[$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [\,0;+\infty\,[$.

Pour tout $x \in [\,0;+\infty\,[$: $f'(x) = 0,06 \times (-2x + 13,7)$ (U')

$= -0,12x + 0,822$.

Ainsi, pour tout $x \in [\,0;+\infty\,[$: $f'(x) = -0,12x + 0,822$.

• Étudions le signe de f' sur $]\,0;+\infty\,[$:

Distinguons deux cas pour tout $x \in [\,0;+\infty\,[$.

1er cas: $f'(x) \leqslant 0$.

$f'(x) \leqslant 0 \iff -0,12x + 0,822 \leqslant 0$ cad $x \geqslant 6,85$ ou $x \in [\,6,85;+\infty\,[$.

2e cas: $f'(x) \geqslant 0$.

$f'(x) \geqslant 0 \iff -0,12x + 0,822 \geqslant 0$ cad $x \leqslant 6,85$ ou $x \in [\,0;6,85\,]$.

Ainsi: • f est croissante sur $[\,0;6,85\,[$,

• f est décroissante sur $[\,6,85;+\infty\,[$.

• Dressons le tableau de variations de f sur $[\,0;+\infty\,[$:

Le tableau de variations de la fonction f sur $[\,0;+\infty\,[$ est:

x	0		$6,85$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	a	$\nearrow$	b	$\searrow$	c

Avec: • $a = f(0) = 0$

• $b = f(6,85)$ (maximum de f sur $[0; +\infty[$)

• $c = -\infty$.

1. c. Résolvons l'équation $f(x) = 0$:

Pour tout $x \in [0; +\infty[$: $f(x) = 0 \iff 0,06(-x^2 + 13,7x) = 0$

$\iff -x^2 + 13,7x = 0$

$\iff x(-x + 13,7) = 0$

cad $x = 0$ ou $x = 13,7$.

Ainsi l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions dans $[0; +\infty[$:

$x = 0$ et $x = 13,7$.

2. a. Déterminons la limite de g en $+\infty$:

Ici: • $g(x) = (-0,15x + 2,2)e^{0,2x} - 2,2$ ($U \times e^V + W$)

• $\mathcal{D}g = [0; +\infty[$.

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} (-0,15x + 2,2)\, e^{0,2x} - 2,2.$$

Or d'après le cours: • $\lim\limits_{x \to +\infty} (-0,15x + 2,2) = -\infty$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{0,2x} = +\infty$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} -2,2 = -2,2.$

Dans ces conditions: $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = (-\infty) \times (+\infty) - 2,2 = -\infty.$

2. b. Calculons $g'(x)$ pour tout $x \in [\,0\,; +\infty\,[$:

La fonction g est dérivable sur $[\,0\,; +\infty\,[$, d'après l'énoncé.

Ainsi, nous pouvons calculer g' pour tout $x \in [\,0\,; +\infty\,[$.

Pour tout $x \in [\,0\,; +\infty\,[$:

$$g'(x) = (-0,15) \times (e^{0,2x}) + (-0,15x + 2,2) \times (0,2\,e^{0,2x}) + 0$$

$$(\,U' \times e^{V} + U \times V'\, e^{V} + W'\,)$$

$$= (-0,03x + 0,29)\, e^{0,2x}.$$

Ainsi, pour tout $x \in [\,0\,; +\infty\,[$: $g'(x) = (-0,03x + 0,29)\, e^{0,2x}.$

2. c. c1. Étudions les variations de g sur $[\,0\,; +\infty\,[$:

Distinguons deux cas pour tout $x \in [\,0\,; +\infty\,[$.

1er cas: $g'(x) \leqslant 0.$

$g'(x) \leqslant 0 \iff -0,03x + 0,29 \leqslant 0$ car $e^{0,2x} > 0$ pour tout $x \in [\,0\,; +\infty\,[$

$$\text{cad} \quad x \geqslant \frac{29}{3} \quad \text{ou} \quad x \in \left[\frac{29}{3}\,; +\infty\right[.$$

2^e cas: $g'(x) \geqslant 0$.

$g'(x) \geqslant 0 \iff -0,03x + 0,29 \geqslant 0$ car $e^{0,2x} > 0$ pour tout $x \in [\,0\,; +\infty\,[$

$$\text{cad} \quad x \leqslant \frac{29}{3} \quad \text{ou} \quad x \in \left[0\,; \frac{29}{3}\right].$$

Ainsi:
- g est croissante sur $\left[0\,; \frac{29}{3}\right]$,
- g est décroissante sur $\left[\frac{29}{3}\,; +\infty\right[$.

2. c. c2. Dressons le tableau de variations de g sur $[\,0\,; +\infty\,[$:

Le tableau de variations de la fonction g sur $[\,0\,; +\infty\,[$ est:

x	0		$\frac{29}{3}$		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	
g	a	$\nearrow$	b	$\searrow$	c

Avec: • $a = g(0) = 0$

- $b = g\left(\frac{29}{3}\right) \approx 2,98$ (maximum de g sur $[\,0\,;+\infty\,[$)

- $c = -\infty$.

Notons que le point $\left(\frac{29}{3}\,;2,98\right)$ correspond au maximum de g sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

2. d. d1. Montrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α non nulle:

Préalablement, notons: comme $\alpha \neq 0$, la solution recherchée se trouvera dans l'intervalle $\left]\frac{29}{3}\,;+\infty\right[$.

D'après le corollaire du TVI: Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $I = [\,a\,;b\,]$ ou $I =]\,a\,;b\,[$ ($a < b$). Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans I.

Ici:
- g est continue sur $[\,0\,;+\infty\,[$, donc sur $\left]\frac{29}{3}\,;+\infty\right[$,
- " $k = 0$ " est compris entre: $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty < 0$

  et: $g\left(\frac{29}{3}\right) \approx 2,98 > 0$,
- g est strictement décroissante sur $\left]\frac{29}{3}\,;+\infty\right[$.

Ainsi, d'après le corollaire du TVI, l'équation $g(x) = 0$ ($k = 0$) admet bien une unique solution α appartenant à $\left]\frac{29}{3}\,;+\infty\right[$.

2. d. d2. Précisons une valeur approchée à 10^{-2} près de α:

A l'aide d'une calculatrice, une valeur approchée de α à 10^{-2} près est:

13, 72.

PARTIE B

Données: $f(13,7) = 0$ et $g(13,7) \approx 0$.

1. a. Déterminons la hauteur maximale atteinte par la balle au cours de sa trajectoire:

La hauteur maximale atteinte par la balle au cours de sa trajectoire est égale à: $f(6,85) = 0$ soit environ 28, 15 yards.

1. b. Vérifions que $f'(0) = 0,822$:

Nous savons que sur $[0; +\infty[$: $f'(x) = -0,12x + 0,822$.

Dans ces conditions: $f'(0) = -0,12 \times 0 + 0,822 = 0,822 = \tan(d)$.

1. c. Donnons une mesure en degré de l'angle de décollage de la balle:

De la question précédente, nous savons que: $\tan(d) = 0,822$.

Or d'après le tableau, $\tan(d) = 0,822$ quand: $d = 39,42°$.

Une mesure de l'angle de décollage de la balle est donc de:

39, 42 degrés.

1. d. Les angles de décollage et d'atterrissage de la balle sont-ils égaux ?

La courbe $\mathscr{C}_f$ étant symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 6,85$: les angles de décollage et d'atterrissage de la balle sont donc égaux.

2. a. Déterminons la hauteur maximale atteinte par la balle au cours de sa trajectoire:

La hauteur maximale atteinte par la balle au cours de sa trajectoire est égale à: $g\left(\frac{29}{3}\right)$ soit environ 29, 8 yards.

2. b. Donnons une mesure en degré de l'angle de décollage de la balle:

D'après l'énoncé: $g'(0) = 0,29 = \tan(d)$.

Or d'après le tableau, $\tan(d) = 0,29$ quand: $d = 16,17°$.

Une mesure de l'angle de décollage de la balle est donc de:

16, 17 degrés.

2. c. Montrons que " 62 " est une valeur approchée d'une mesure en degré de l'angle d'atterrissage de la balle:

D'après l'énoncé: $g'(13,7) = -1,87$.

Donc $\tan(a) = 1,87$ (" opposé du coefficient directeur ").

$\tan(a) = 1,87$ quand: $a = 62°$.

Une mesure de l'angle d'atterrissage de la balle est donc de: 62 degrés.

PARTIE C

Quel modèle semble le plus adapté pour décrire la frappe de la balle par un joueur professionnel ?

Aucun des deux modèles est à retenir pour décrire la frappe de la balle par un joueur professionnel.

En effet, les résultats moyens présentés dans le tableau, sur-estiment ou sous-estiment ceux des deux modèles sauf 1: celui de la distance en yard au point de la chute 137.

C'est insuffisant !