BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 2

NOUVELLE CALÉDONIE

2023

$f(x) = x e^{-x}$

CORRECTION

1. Montrons que la courbe $\mathcal{C}f$ possède une asymptote en $+\infty$:

Ici: • $f(x) = x\,e^{-x} = \dfrac{x}{e^x}$ $\left(\dfrac{u}{v}\right)$

• $\mathcal{D}f = [\,0\,;+\infty\,[$.

Pour répondre à la question, nous allons calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$, d'après le théorème des croissances comparées.

Or d'après le cours: si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, la courbe représentative de f admet une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = \ell$.

Donc ici, en $+\infty$ la courbe $\mathcal{C}f$ possède une asymptote horizontale d'équation: $y = 0$.

2. Montrons que pour tout $x \in [\,0\,;+\infty\,[$, $f'(x) = (1 - x)\,e^{-x}$:

La fonction $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$ est dérivable sur $[\,0\,;+\infty\,[$, d'après l'énoncé.

Ainsi nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [\, 0 ; +\infty \,[$.

Pour tout $x \in [\, 0 ; +\infty \,[$: $f'(x) = \dfrac{(1) \times (e^x) - (x) \times (e^x)}{[\, e^x \,]^2}$ $\left(\dfrac{U' \times V - U \times V'}{V^2} \right)$

$$= \frac{e^x - x\,e^x}{[\, e^x \,]^2}$$

$$= \frac{(1 - x)}{e^x}.$$

Ainsi, pour tout $x \in [\, 0 ; +\infty \,[$, nous avons bien: $f'(x) = \dfrac{(1 - x)}{e^x} = (1 - x) \times e^{-x}$.

3. Dressons le tableau de variations de f sur $[\, 0 ; +\infty \,[$:

• Étudions le signe de f' sur $[\, 0 ; +\infty \,[$:

Distinguons deux cas pour tout $x \in [\, 0 ; +\infty \,[$, **sachant que $e^x > 0$.**

1er cas: $f'(x) \leqslant 0$.

$f'(x) \leqslant 0 \iff 1 - x \leqslant 0$ cad $x \geqslant 1$ ou $x \in [\, 1 ; +\infty \,[$.

2e cas: $f'(x) \geqslant 0$.

$f'(x) \geqslant 0 \iff 1 - x \geqslant 0$ cad $x \leqslant 1$ ou $x \in [\, 0 ; 1 \,]$.

Ainsi:
- f est décroissante sur $[\, 1 ; -\infty \,[$,
- f est croissante sur $[\, 0 ; 1 \,]$.

• Dressons le tableau de variations de f sur $[\, 0 ; +\infty \,[$:

Le tableau de variations de la fonction f sur $[\, 0 ; +\infty \,[$ est:

x	0		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	a	$\nearrow$	b	$\searrow$	c

Avec: • $a = f\ (0) = 0$

• $b = f\ (1) = e^{-1}$ (maximum de f sur $[\ 0\ ;+\infty\ [$)

• $c = \lim\limits_{x \to +\infty} f\ (x) = 0.$

L'extremum de f sur $[\ 0\ ;+\infty\ [$ est un maximum de coordonnées: $(\ 1\ ;\ e^{-1})$.

4. Déterminons sur $[\ 0\ ;+\infty\ [$ le nombre de solutions de $f\ (x) = 0,367$:

Comme dit à la question précédente, l'ordonnée du maximum de f sur $[\ 0\ ;+\infty\ [$ est: $e^{-1} \approx 0,3678 > 0,367$.

Dans ces conditions, nous pouvons affirmer que: le nombre de solutions de $f\ (x) = 0,367$ est égal à 2.

• la première appartient à $[\ 0\ ;\ 1\ [$

• la seconde appartient à $]\ 1\ ;+\infty\ [$.

5. Étudions la convexité de la fonction f sur $[\ 0\ ;+\infty\ [$:

D'après le cours: • f est concave sur I ssi $f''\ (x) \leqslant 0$ pour tout $x \in I$

• f est convexe sur I ssi $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.

Ici: • $f''(x) = e^{-x}(x - 2) = \dfrac{x - 2}{e^x}$

• $\mathcal{D}f'' = [\,0\,;+\infty\,[$.

Comme pour tout $x \in [\,0\,;+\infty\,[$, $e^x > 0$, le signe de f'' dépend uniquement du signe de $x - 2$.

Distinguons deux cas: • $x - 2 \geq 0$ ssi $x \geq 2$ cad $x \in [\,2\,;+\infty\,[$,

• $x - 2 \leq 0$ ssi $x \leq 2$ cad $x \in [\,0\,;2\,]$.

Ainsi: • sur $[\,0\,;2\,]$, $f''(x) \leq 0$ et donc f est concave,

• sur $[\,2\,;+\infty\,[$, $f''(x) \geq 0$ et donc f est convexe.

6. a. Déterminons une équation réduite de T_a, tangente à $\mathcal{C}_f$ en $x = a$:

L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A $(a\,;f(a))$ s'écrit:

$$y = f'(x_A) \times (x - x_A) + f(x_A)$$

cad: $y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$.

Or ici: • $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$,

• $f'(x) = \dfrac{(1 - x)}{e^x}$,

• $f(a) = \dfrac{a}{e^a}$,

• $f'(a) = \dfrac{(1-a)}{e^a}$.

Dans ces conditions: $y = \left[\dfrac{(1-a)}{e^a} \right] \times (x - a) + \dfrac{a}{e^a}$

$= (1-a)\, e^{-a} x - (1-a)\, e^{-a} \times a + a\, e^{-a}$

cad: $y = (1-a)\, e^{-a} x + a^2\, e^{-a}$.

L'équation de la tangente T_a est donc: $y = [\,(1-a)\, e^{-a}]\, x + a^2\, e^{-a}$.

6. b. Déduisons-en l'expression de g (a):

D'après l'énoncé, g (a) correspond à l'ordonnée de Ha, Ha étant le point d'intersection de la droite T_a et de l'axe des ordonnées.

D'où: $g(a) = a^2\, e^{-a}$.

Nous avons donc: $g(a) = a^2\, e^{-a}$.

6. c. Montrons que g (a) est maximum quand A (a ; f (a)) est un point d'inflexion:

g (a) est maximum quand: $g'(a) = 0$ et $g''(a) < 0$.

Or: $g(a) = a^2\, e^{-a}$.

D'où: • $g'(a) = (2a \times e^{-a}) + (a^2 \times (-e^{-a}))$

cad $g'(a) = e^{-a} \times [\,2a - a^2\,]$.

• $g''(a) = (2 - 2a) \times (e^{-a}) + (2a - a^2) \times (-e^{-a})$

cad $g''(a) = e^{-a} \times [a^2 - 4a + 2]$.

Dans ces conditions: $g'(a) = 0 \iff 2a - a^2 = 0$ $\quad (e^{-a} > 0)$

$\iff a(2 - a) = 0$

cad ssi: $a = 0$ ou $a = 2$.

Distinguons deux cas: • si $a = 0$, $g''(a) = 2 > 0$, cas à rejeter

• si $a = 2$, $g''(a) = -2e^{-a} < 0$, cas à retenir.

Au total, $g(a)$ est maximum quand $a = 2$, ce qui correspond au point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Coordonnées du point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$: $\left(2 ; \frac{4}{e^2}\right)$.