www.freemaths.fr

BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 1

AMÉRIQUE DU NORD

2023

$$f(x) = (x^2 - 5x + 6)\,e^x$$

CORRECTION

PARTIE A

1. Donnons le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$:

Nous sommes en présence de la représentation graphique de la courbe de la dérivée f' de f sur $\mathbb{R}$.

Au vu du graphique, nous pouvons dire que:

- f' est positive sur $\left]-\infty ; \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{5}{3} ; +\infty\right[$,
- f' est négative sur $\left[\frac{1}{3} ; \frac{5}{3}\right]$.

Dans ces conditions:
- f est croissante sur $\left]-\infty ; \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{5}{3} ; +\infty\right[$,
- f est décroissante sur $\left[\frac{1}{3} ; \frac{5}{3}\right]$.

2. Donnons les intervalles sur lesquels la fonction f semble être convexe:

Au vu du graphique, nous pouvons dire que:

• f' est croissante sur $]-\infty ; -1] \cup [2 ; +\infty[$,

• f' est décroissante sur $[-1 ; 2]$.

D'après le cours: **f est convexe sur un intervalle I ssi $f''(x) \geq 0$, pour tout $x \in I$.**

Or ici, f' est croissante sur $]-\infty ; -1] \cup [2 ; -\infty[$ ce qui revient à dire que:

$$\text{sur }]-\infty ; -1] \cup [2 ; +\infty[, f''(x) \geq 0.$$

Au total, nous pouvons affirmer que: la fonction f est convexe sur l'intervalle $]-\infty ; -1] \cup [2 ; +\infty[$.

PARTIE B

1. a. Déterminons la limite de la fonction f en $+\infty$:

Ici: • $f(x) = (x^2 - 5x + 6)\, e^x$ $\quad (U \times V)$

• $\mathcal{D}f = \mathbb{R}$.

En $+\infty$, la fonction f peut s'écrire: $f(x) = x^2 \times \left[1 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{6}{x^2} \right] e^x$. $\quad (x \neq 0)$

D'où: $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 \times \left[1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2} \right] e^x.$$

Or d'après le cours: • $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty.$

Dans ces conditions: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = (+\infty) \times [\, 1 - 5 \times 0 + 6 \times 0 \,] \times (+\infty) = +\infty.$

1. b. Déterminons la limite de la fonction f en $-\infty$:

En $-\infty$, la fonction f peut s'écrire: $f(x) = x^2 \times \left[1 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{6}{x^2} \right] e^x.$ $(\, x \neq 0 \,)$

D'où: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2\, e^x \times \left[1 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{6}{x^2} \right].$

Or d'après le cours:

- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2\, e^x = 0$ (Croissances Comparées)

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0.$

Dans ces conditions: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \times [\, 1 - 5 \times 0 + 6 \times 0 \,] = 0.$

2. Montrons que pour tout $x \in IR$, $f'(x) = (x^2 - 3x + 1)\, e^x$:

La fonction $f(x) = (x^2 - 5x + 6)\, e^x$ est dérivable sur IR comme produit de deux fonctions dérivables sur IR.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in IR$.

Pour tout $x \in IR$: $\mathbf{f'(x)} = (2x - 5)\, e^x + (x^2 - 5x + 6)\, e^x$

$$(U' \times V + U \times V')$$

$$= (x^2 - 3x + 1)\, e^x.$$

Ainsi pour tout $x \in IR$, nous avons bien: $f'(x) = (x^2 - 3x + 1)\, e^x$.

3. Déduisons-en le sens de variation de la fonction f sur IR:

Sachant que $e^x > 0$, pour tout $x \in IR$, le signe de f' dépend uniquement du signe de $x^2 - 3x + 1$.

Or: $x^2 - 3x + 1 = (x - x_1) \times (x - x_2)$,

avec:
- $x_1 = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$
- $x_2 = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

$(\Delta = \sqrt{5})$

D'où le tableau de variations de la fonction f sur IR est:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
f'		+	0	-	0	+	
f	a	↗	b	↘	c	↗	d

Avec: • $a = 0$

- $b = f(x_1)$
- $c = f(x_2)$
- $d = +\infty$.

Ainsi: • f est croissante sur $]-\infty ; x_1] \cup [x_2 ; +\infty[$,

• f est décroissante sur $[x_1 ; x_2]$.

4. Déterminons l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}f$ au point A $(0 ; f(0))$:

L'équation de la tangente à $\mathcal{C}f$ au point A $(0 ; f(0)$ s'écrit:

$$y = f'(x_A) \times (x - x_A) + f(x_A)$$

cad: $y = f'(0) \times (x - 0) + f(0)$.

Or ici: • $f(x) = (x^2 - 5x + 6)\, e^x$,

- $f'(x) = (x^2 - 3x + 1)\, e^x$,
- $f(0) = 6$,
- $f'(0) = 1$.

Dans ces conditions: $y = 1 \times (x - 0) + 6$

cad: $y = x + 6$.

L'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}f$ au point A $(0 ; f(0)$ est donc:

$$y = x + 6.$$

5. a. Étudions la convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$:

D'après l'énoncé: • $f''(x) = (x + 1)(x - 2)e^x$

• $\mathcal{D}f'' = \mathbb{R}$.

Et d'après le cours: • f est concave sur I ssi $f''(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in I$

• f est convexe sur I ssi $f''(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$.

Pour répondre à la question, nous allons étudier le signe de f'' sur $\mathbb{R}$, **sachant que $e^x > 0$.**

Le signe de f'' dépend donc uniquement du signe de $(x + 1)(x - 2)$.

Le tableau de signes de f'' sur $\mathbb{R}$ est donc:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x + 1$		-	0	+		+	
$x - 2$		-		-	0	+	
$f''(x)$		+	0	-	0	+	

Ainsi: • f est convexe sur $]-\infty ; -1]$,

• f est concave sur $[-1 ; 2]$,

• f est convexe sur $[2 ; +\infty[$.

5. b. Montrons que pour tout $x \in [-1 ; 2]$, $f(x) \leqslant x + 6$:

Nous savons que sur $[-1 ; 2]$, la fonction f est concave.

Par conséquent, sa courbe représentative est située au-dessous de toutes ses tangentes et en particulier au-dessous de la tangente ayant pour équation $y = x + 6$.

Ainsi pour tout $x \in [-1; 2]$, nous pouvons écrire: $f(x) \leqslant x + 6$.