

www.freemaths.fr

BACCALAURÉAT MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ
EXERCICE 3



ASIE

2023

$$f(x) = \ln(x) - x$$

CORRECTION

1. a. Conjeturons le nombre de solutions de l'équation $\ln(x) = x$:

L'équation $\ln(x) = x$ ne semble pas avoir de solution, car les courbes représentatives des fonctions " $\ln(x)$ " et " x " ne se coupent pas.

1. b. Conjeturons le nombre de solutions de l'équation $\ln(x) = 0,2x$:

L'équation $\ln(x) = 0,2x$ semble avoir 2 de solutions, car les courbes représentatives des fonctions " $\ln(x)$ " et " $0,2x$ " se coupent en deux points distincts.

2. a. Calculons $f'(x)$:

Ici: • $f(x) = \ln(x) - x$ (U - V)

• $\mathcal{D}f =]0; +\infty[$.

La fonction $f(x) = \ln(x) - x$ est dérivable sur $]0; +\infty[$, d'après l'énoncé.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in]0; +\infty[$.

Pour tout $x \in]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{1}{x} - 1$

(U' - V')

$$= \frac{1-x}{x}$$

Ainsi pour tout $x > 0$: $f'(x) = \frac{1-x}{x}$.

2. b. b1. Étudions le sens de variations de la fonction f sur $]0; +\infty[$:

Distinguons deux cas pour tout $x \in]0; +\infty[$, sachant que $x > 0$.

1^{er} cas: $f'(x) \leq 0$.

$$f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow 1-x \leq 0 \text{ cad } x \geq 1 \text{ ou } x \in [1; +\infty[.$$

2^e cas: $f'(x) \geq 0$.

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1-x \geq 0 \text{ cad } x \leq 1 \text{ ou } x \in]0; 1].$$

Ainsi: • f est croissante sur $]0; 1]$,

• f est décroissante sur $[1; +\infty[$.

2. b. b2. Dressons le tableau de variations de f sur $]0; +\infty[$:

Le tableau de variations de la fonction f sur $]0; +\infty[$ est:

x	0		1		$+\infty$
f'			+	0	-
f				b	
		a			c

Diagramme du tableau de variations: Une double ligne verticale est tracée à $x=0$. Une flèche violette pointe de a (à $x=0$) vers b (à $x=1$). Une autre flèche violette pointe de b vers c (à $x=+\infty$).

Avec: • $a = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

• $b = f(l) = -l$ (maximum de f sur $]0; +\infty[$)

• $c = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2. c. Dédudons-en le nombre de solutions de l'équation $\ln(x) = x$:

Pour tout $x \in]0; +\infty[$: $\ln(x) = x \iff \ln(x) - x = 0$ cad $f(x) = 0$.

Or le maximum de f sur $]0; +\infty[$ est: $f(l) = -l$.

Donc les valeurs de f sont toutes strictement négatives et par conséquent: l'équation $\ln(x) = x$ n'admet aucune solution.

3. a. Donnons en fonction du signe de $g\left(\frac{l}{k}\right)$ le nombre de solutions de $g(x) = 0$:

Ici: • $g(x) = \ln(x) - kx$, avec $k > 0$

• $\mathcal{D}g =]0; +\infty[$.

x	0	$\frac{l}{k}$	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	$g\left(\frac{l}{k}\right)$	$+\infty$

Diagram illustrating the behavior of the function $g(x) = \ln(x) - kx$ on the interval $]0; +\infty[$. The x-axis is marked with 0 , $\frac{l}{k}$, and $+\infty$. The y-axis is marked with $-\infty$ and $+\infty$. A vertical line is drawn at $x = \frac{l}{k}$. The function value at $x = \frac{l}{k}$ is $g\left(\frac{l}{k}\right)$. Arrows indicate that the function increases from $-\infty$ at $x = 0$ to $g\left(\frac{l}{k}\right)$ at $x = \frac{l}{k}$, and then decreases from $g\left(\frac{l}{k}\right)$ to $+\infty$ at $x = +\infty$.

Avec: $g\left(\frac{l}{k}\right) = \ln\left(\frac{l}{k}\right) - k \times \left(\frac{l}{k}\right)$

$$= -\ln(k) - l.$$

Nous allons distinguer trois cas.

Cas 1:

$$g\left(\frac{l}{k}\right) = 0 \Leftrightarrow -\ln(k) - l = 0 \Leftrightarrow \ln(k) = -l \quad \text{cad} \quad k = e^{-l}.$$

Dans ce cas, $g(x) = 0$ admet une unique solution: $x = \frac{l}{k}$.

Cas 2:

$$g\left(\frac{l}{k}\right) < 0 \Leftrightarrow \ln(k) > -l \quad \text{cad} \quad k > e^{-l}. \quad (k \in]e^{-l}; +\infty[)$$

Dans ce cas, $g(x) = 0$ n'admet aucune solution (voir la question 2. c.).

Cas 3:

$$g\left(\frac{l}{k}\right) > 0 \Leftrightarrow \ln(k) < -l \quad \text{cad} \quad k < e^{-l}. \quad (k \in]0; e^{-l}[)$$

Dans ce cas, $g(x) = 0$ admettra deux solutions:

- une solution dans $]0; \frac{l}{k}[$
- une solution dans $]\frac{l}{k}; +\infty[$.

3. b. Calculons $g\left(\frac{l}{k}\right)$ en fonction du réel k :

Comme vu à la question précédente: $g\left(\frac{l}{k}\right) = -\ln(k) - l.$

3. c. Montrons que $g\left(\frac{1}{k}\right) > 0 \iff \ln(k) < -1$:

Comme déjà vu: $g\left(\frac{1}{k}\right) > 0 \iff -\ln(k) - 1 > 0$

$$\iff -\ln(k) > 1.$$

cad $\ln(k) < -1$.

3. d. Déterminons l'ensemble des valeurs de k telles que $g(x) = 0$ possède exactement deux solutions:

Comme déjà vu, l'ensemble demandé est: $k \in]0; e^{-1}[$.

3. e. Donnons selon les valeurs de k , le nombre de solutions de $g(x) = 0$:

DÉJÀ TRAITÉ PAGE 4 DE CE CORRIGÉ !!!