www.freemaths.fr

BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 2

FRANCE MÉTROPOLITAINE
2023

$f(x) = x^2 - 8\ln(x)$

CORRECTION

1. Déterminons $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$:

Ici: • $f(x) = x^2 - 8\ln(x)$ $\quad (U - 8\ln(V))$

• $\mathcal{D}f =]0\,; +\infty[$.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x^2 - 8\ln(x).$$

Or d'après le cours: • $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 = 0$

• $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$.

Dans ces conditions: $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0 - 8 \times (-\infty) = +\infty$.

2. Déduisons-en la limite de $f(x)$ en $+\infty$:

En $+\infty$, la fonction f peut s'écrire: $f(x) = x^2 \times \left(1 - \dfrac{8\ln(x)}{x^2}\right)$. $\quad (x > 0)$

D'où: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \left(1 - \dfrac{8\ln(x)}{x^2}\right)$.

Or d'après le cours: • $\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

• $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$ (Croissances Comparées).

Dans ces conditions: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \times (1 - 0) = +\infty$.

3. Montrons que pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = \frac{2(x^2-4)}{x}$:

La fonction $f(x) = x^2 - 8\ln(x)$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in]0;+\infty[$.

Pour tout $x \in]0;+\infty[$: $f'(x) = 2x - 8 \times \left(\frac{1}{x}\right)$ $\left(U' - 8 \times \frac{V'}{V}\right)$

$$= 2x - \frac{8}{x}$$

$$= \frac{2x^2 - 8}{x}$$

$$= \frac{2(x^2-4)}{x}.$$

Donc nous avons bien pour tout $x \in]0;+\infty[$: $f'(x) = \frac{2(x^2-4)}{x}$.

4. a. Étudions le signe de f' sur $]0;+\infty[$:

Préalablement, notons que: le signe de f' dépend du signe de $(x^2 - 4)$ car pour tout $x \in]0;+\infty[$, $\frac{2}{x} > 0$.

Distinguons deux cas pour tout $x \in]\,0\,;+\infty\,[$.

1er cas: $f'(x) \leqslant 0$.

$f'(x) \leqslant 0 \iff x^2 - 4 \leqslant 0$

$\iff x^2 \leqslant 4$

$\iff x \in [-2\,;2\,]$ cad ici $x \in]\,0\,;2\,]$.

2e cas: $f'(x) \geqslant 0$.

$f'(x) \geqslant 0 \iff x^2 - 4 \geqslant 0$

$\iff x^2 \geqslant 4$

$\iff x \in]-\infty\,;-2\,] \cup [\,2\,;+\infty\,[$ cad ici $x \in [\,2\,;+\infty\,[$.

Ainsi: • f est décroissante sur $]\,0\,;2\,]$,

• f est croissante sur $[\,2\,;+\infty\,[$.

4. b. Dressons le tableau de variations de la fonction f sur $]\,0\,;+\infty\,[$:

Le tableau de variations de la fonction f sur $]\,0\,;+\infty\,[$ est:

x	0		2		$+\infty$
f'	||	-	0	+	
f	|| a	↘	b	↗	c

Avec: • $a = +\infty$

- $b = f(2) = 4 - 8\ln(2)$ (minimum de f sur $]0; +\infty[$)

- $c = +\infty$.

5. **Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0; 2]$:**

Nous allons appliquer le **corollaire** du théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

D'après le corollaire du TVI: **Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $I = [a; b]$ ou $I =]a; b[$ ($a < b$). Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans I.**

Ici: • f est continue sur $]0; +\infty[$, donc sur $]0; 2]$,

• " $k = 0$ " est compris entre: $f(2) = 4 - 8\ln(2) < 0$

et: $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty > 0$,

• f est strictement décroissante sur $]0; 2]$.

Ainsi, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 0$ ($k = 0$) admet bien une unique solution α appartenant à $]0; 2]$.

6. **Déduisons-en le signe de f sur $]0; +\infty[$:**

D'après l'énoncé, sur $[2; +\infty[$: **$f(x) = 0$ admet une unique solution β.**

Dans ces conditions, nous pouvons en déduire le signe de la fonction f via le tableau suivant:

x	0		α		2		β		$+\infty$
f'	‖	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
f	‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	b	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
Signe de f	‖	$+$	0		$-$		0	$+$	

7. Déterminons la plus petite valeur de " k " telle que $g_k(x) \geqslant 0$ sur $]0\,;+\infty[$:

Ici: • $g_k(x) = x^2 - 8\ln(x) + k = f(x) + k$

• $\mathcal{D}g_k =]0\,;+\infty[$.

Comme $g_k(x) = f(x) + k$, la fonction g_k a donc les mêmes variations que la fonction f sur $]0\,;+\infty[$.

g_k admet donc comme minimum le point A $(2\,;\,4 - 8\ln(2) + k)$.

La plus petite valeur de k pour laquelle $g_k(x) \geqslant 0$ sur $]0\,;+\infty[$ est donc telle que: $4 - 8\ln(2) + k \geqslant 0$ cad $k \geqslant 8\ln(2) - 4$.

La plus petite valeur de " k " est donc: $8\ln(2) - 4$.