

1re

MATHÉMATIQUES

Enseignement de Spécialité

Variables Aléatoires

&

$E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$

Mini Cours

 www.freemaths.fr

A. Variables aléatoires :

1. Définition d'une variable aléatoire :

Soit Ω l'univers cad l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire.

Une variable aléatoire sur Ω est une fonction définie sur Ω à valeurs dans \mathbb{R} .

2. Définition d'une loi de probabilité d'une variable aléatoire :

Définir la loi de probabilité d'une variable aléatoire X , c'est associer à chaque valeur x_i prise par X la probabilité de l'événement $\{X = x_i\}$.

On présente la loi de probabilité d'une variable aléatoire X sous la forme d'un tableau :

| | | | | | |
|--------------|-------|-------|-------|-----|-------|
| x_i | x_1 | x_2 | x_3 | ... | x_n |
| $P(X = x_i)$ | P_1 | P_2 | P_3 | ... | P_n |

3. Exemple :

Une urne contient 3 boules : 2 rouges (**R**) et 1 blanche (**B**).

Soit l'expérience aléatoire consistant à tirer avec remise 3 boules, et X la variable aléatoire (v. a.) représentant le nombre de boules rouges tirées.

- Les valeurs que peut prendre la v. a. X sont : 0, 1, 2, 3.

Ainsi, $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs que peut prendre la v. a. X est :

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}.$$

• **Nous avons:** • $P(X = 0) = P(BBB) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27};$

• $P(X = 1) = P(RBB) + P(BRB) + P(BBR)$

$$= \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{6}{27};$$

• $P(X = 2) = P(RRB) + P(RBR) + P(BRR)$

$$= \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{12}{27};$$

• $P(X = 3) = P(RRR) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27}.$

Notons que: $P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 1.$

• **La loi de probabilité de la v. a. X est:**

| x_i | $x_1 = 0$ | $x_2 = 1$ | $x_3 = 2$ | $x_4 = 3$ |
|--------------|----------------|----------------|-----------------|----------------|
| $P(X = x_i)$ | $\frac{1}{27}$ | $\frac{6}{27}$ | $\frac{12}{27}$ | $\frac{8}{27}$ |

B. Espérance Mathématique d'une variable aléatoire X:

1. Formule :

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X est donnée par

la formule :
$$E(X) = \sum_{i=1}^n P(X = x_i) \times x_i$$

$$\Leftrightarrow E(X) = P_1 \times x_1 + P_2 \times x_2 + P_3 \times x_3 + \dots + P_n \times x_n.$$

2. Propriétés :

- $E(aX + b) = aE(X) + b$
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
- $E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c.$

3. Interprétation de $E(X)$:

- L'espérance représente la moyenne des résultats obtenus pour un jeu, lorsqu'on effectue un grand nombre de fois le jeu proposé.
- Un jeu est équitable quand : $E(X) = 0.$

4. Exemple :

Dans l'exemple précédent :

$$E(X) = \left(\frac{1}{27} \times 0\right) + \left(\frac{6}{27} \times 1\right) + \left(\frac{12}{27} \times 2\right) + \left(\frac{8}{27} \times 3\right) \Leftrightarrow E(X) = 2.$$

C. Variance et écart type d'une variable aléatoire X :

1. Formule de la variance :

La variance d'une variable aléatoire X est donnée par la formule :

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_{i=1}^n P(X = x_i) \times (x_i - E(X))^2 \\ &= \sum_{i=1}^n P(X = x_i) \times x_i^2 - [E(X)]^2 \\ &= E(X^2) - [E(X)]^2. \end{aligned}$$

2. Propriétés :

- $V(aX + b) = a^2 V(X)$
- $V(aX) = a^2 V(X)$
- $V(X) \geq 0$
- $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$, si X et Y sont indépendantes
- $V(aX + bY + c) = a^2 V(X) + b^2 V(Y)$, si X et Y sont indépendantes
- $V(X) = 0$ signifie que X est une variable certaine.

3. Formule de l'écart type :

L'écart type d'une variable aléatoire X est donné par la formule :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

4. Exemple :

Dans l'exemple précédent :

$$\bullet V(X) = \left(\frac{1}{27} \times 0^2\right) + \left(\frac{6}{27} \times 1^2\right) + \left(\frac{12}{27} \times 2^2\right) + \left(\frac{8}{27} \times 3^2\right) - [E(X)]^2$$

$$= \frac{126}{27} - [2]^2$$

$$= \frac{2}{3}.$$

$$\bullet \sigma(X) = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$