1re

MATHÉMATIQUES

Enseignement de Spécialité

Arbres de Probabilités

Correction

PARTIE GAGNÉE OU PERDUE ?

CORRECTION

1. Montrons que $p_2 = \frac{7}{16}$:

D'après l'énoncé, nous avons:

- G_n = " la $n^{ième}$ partie est gagnée ".
- $\overline{G}_n$ = " la $n^{ième}$ partie est perdue ".

- $P_{\overline{G}_{n-1}} (G_n) = 25\%$
- $P_{\overline{G}_{n-1}} (\overline{G}_n) = 1 - 25\% = 75\%$.

- $P_{\overline{G}_{n-1}} (\overline{G}_n) = 50\%$
- $P_{\overline{G}_{n-1}} (G_n) = 1 - 50\% = 50\%$.

- $P (A_1) = p_1 = 25\%$
- $P (G_n) = p_n$
- $P (\overline{G}_n) = 1 - p_n$.

Il s'agit ici de calculer: $P (G_2)$.

L'événement $G_2 = (G_2 \cap G_1) \cup (G_2 \cap \overline{G}_1)$.

D'où: $P(G_2) = P(G_2 \cap G_1) + P(G_2 \cap \overline{G}_1)$

$$= P_{G_1}(G_2) \times P(G_1) + P_{\overline{G}_1}(G_2) \times P(\overline{G}_1).$$

Ainsi: $P(G_2) = 25\% \times 25\% + 50\% \times 75\%$ => $P(G_2) = 43,75\%$.

Au total, nous avons bien: $p_2 = 43,75\%$ ou $p_2 = \frac{7}{16}$.

2. Montrons que, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = -\frac{1}{4} p_n + \frac{1}{2}$:

Nous avons, pour tout entier naturel n non nul: $p_n = P(G_n)$ et $p_{n+1} = P(G_{n+1})$.

L'événement $G_{n+1} = (G_{n+1} \cap G_n) \cup (G_{n+1} \cap \overline{G}_n)$.

D'où: $P(G_{n+1}) = P(G_{n+1} \cap G_n) + P(G_{n+1} \cap \overline{G}_n)$

$$= P_{G_n}(G_{n+1}) \times P(G_n) + P_{\overline{G}_n}(G_{n+1}) \times P(\overline{G}_n).$$

Ainsi: $P(G_{n+1}) = 25\% \times p_n + 50\% \times (1 - p_n)$

=> $p_{n+1} = -25\% \times p_n + 50\%$ ou $p_{n+1} = -\frac{1}{4} \times p_n + \frac{1}{2}$.

Au total, pour tout entier naturel n non nul: $p_{n+1} = -\frac{1}{4} p_n + \frac{1}{2}$.

3. Quelle conjecture peut-on émettre ?

La conjecture que nous pouvons émettre sur la convergence de la suite (p_n) est:

" on pourrait, a priori, penser que la suite (p_n) converge vers 0, 4 ".

4. a. Montrons que (U_n) est une suite géométrique dont on donnera U_1 et la raison q:

Pour tout entier naturel n non nul:

$$U_n = p_n - \frac{2}{5} \iff U_{n+1} = p_{n+1} - \frac{2}{5}$$

$$\iff U_{n+1} = \left(-\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}\right) - \frac{2}{5} \quad (1).$$

Or: $U_1 = p_1 - \frac{2}{5} \Rightarrow U_1 = -\frac{3}{20}$ et $p_n = U_n + \frac{2}{5}$.

Ainsi: $(1) \iff U_{n+1} = \left(-\frac{1}{4}\left[U_n + \frac{2}{5}\right] + \frac{1}{2}\right) - \frac{2}{5}$

$$\Rightarrow U_{n+1} = -\frac{1}{4}U_n.$$

Par conséquent (U_n) est bien une suite géométrique de raison $q = -\frac{1}{4}$ et de premier terme $U_1 = -\frac{3}{20}$.

4. b. Déduisons-en que, pour tout entier naturel n non nul, $p_n = \frac{2}{5} - \frac{3}{20}\left(-\frac{1}{4}\right)^{(n-1)}$:

- Comme $U_{n+1} = -\frac{1}{4}U_n$: $U_n = U_1 \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{(n-1)}$, avec: $U_1 = -\frac{3}{20}$.
- Nous savons que: * $U_n = -\frac{3}{20} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{(n-1)}$

  * $p_n = U_n + \frac{2}{5}$.

D'où: $p_n = -\frac{3}{20}\left(-\frac{1}{4}\right)^{(n-1)} + \frac{2}{5}$, pour tout entier naturel n non nul.

4. c. Montrons que la suite (p_n) est convergente et interprétons le résultat:

Pour cela, nous allons calculer: $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.

$$\lim_{n \to +\infty} p_n = \lim_{n \to +\infty} -\frac{3}{20}\left(-\frac{1}{4}\right)^{(n-1)} + \frac{2}{5}$$

$$= \frac{2}{5} \quad \text{car: } \lim_{n \to +\infty} -\frac{3}{20}\left(-\frac{1}{4}\right)^{(n-1)} = 0, \quad \text{car: } -\frac{1}{4} \in \left]-1\,;0\right[.$$

Cela signifie que: au bout d'un grand nombre de parties, le joueur a environ $\frac{2}{5} = 40\%$ de chance de gagner une partie.

Et de plus, cela valide la conjecture émise à la question **3**.