1re

MATHÉMATIQUES

Enseignement de Spécialité

Signe d'un polynôme & Inéquations

Mini Cours

A. Signe d'un polynôme du second degré:

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ et $\Delta = b^2 - 4ac$.

1. Si $\Delta = 0$:

Dans ce cas, nous sommes en présence d'une solution unique: $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.

Le tableau de signes de f est:

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
signe de $f(x)$		signe de a	0	signe de a	

2. Si $\Delta < 0$:

Dans ce cas, il n'y a aucune solution dans $\mathbb{R}$.

Le tableau de signes de f est:

x	$-\infty$		$+\infty$
signe de $f(x)$		signe de a	

3. Si $\Delta > 0$:

Dans ce cas, nous sommes en présence de deux racines distinctes:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Le tableau de signes de f est:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
signe de $f(x)$		signe de a	0	signe de (-a)	0	signe de a	

B. Résoudre une inéquation:

Soit les inéquations: $f(x) > \mathrm{w}$, $f(x) \geq \mathrm{w}$, $f(x) < \mathrm{w}$ et $f(x) \leq \mathrm{w}$.

Etape 1: on pose $f(x) = \mathrm{w}$.

Etape 2: on détermine l'ensemble de définition de $f(x) - \mathrm{w}$.

Etape 3: on trouve les racines de l'équation $f(x) - \mathrm{w} = 0$.

Etape 4: on dresse le tableau de signes de $f(x) - \mathrm{w}$.

Etape 5: on conclut.

C. Courbe représentative d'une fonction trinôme:

- Soit $f(x) = \mathrm{a}x^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c}$ ($\mathrm{a} \neq 0$) une fonction trinôme définie sur $\mathbb{R}$.

  Sa courbe représentative est une parabole d'équation:

  $$y = \mathrm{a}x^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c}, \text{ avec } \mathrm{a} \neq 0.$$

- Le sommet de cette parabole est le point: $S\left(-\dfrac{b}{2a}\,;\,-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$.

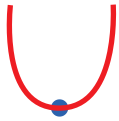
D. Sommets, extremum et axe de symétrie:

Soit $f(x) = \mathrm{a}x^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c}$ ($\mathrm{a} \neq 0$) une fonction trinôme définie sur $\mathbb{R}$.

Sous forme canonique, f s'écrit:

$$f(x) = a\,(x - \alpha)^2 + \beta, \text{ avec } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = -\frac{\Delta}{4a}.$$

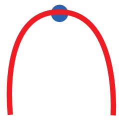
- **Si $a > 0$:**
  - la courbe représentative est une parabole tournée vers le haut,
  - le sommet S (α, β) est un minimum,
  - l'axe de symétrie est: $x = \alpha$.



S

- **Si $a < 0$:**
  - la courbe représentative est une parabole tournée vers le bas,
  - le sommet S (α, β) est un maximum,
  - l'axe de symétrie est: $x = \alpha$.

S



E. Sens de variations:

- **Si $a > 0$:** la fonction f est d'abord décroissante puis croissante.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	β	$\nearrow$

- **Si $a < 0$:** la fonction f est d'abord croissante puis décroissante.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	β	$\searrow$

F. Démonstration à connaître:

Théorème: **Un polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) est toujours du signe de " a ", sauf dans le cas $\Delta > 0$ pour les valeurs comprises entre les deux racines.**