1re

MATHÉMATIQUES

Enseignement de Spécialité

Équations du second degré

Correction

THÉORÈME 1

DÉMONSTRATION

Soit l'équation du second degré: $ax^2 + bx + c = 0$, avec $a \neq 0$.

En passant par la forme canonique, nous pouvons écrire:

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff a(x - \alpha)^2 + \beta = 0$$

$$\iff a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{-b^2 + 4ac}{4a}\right) = 0 \quad (1).$$

Or, d'après le cours le discriminant Δ est égal à: $\Delta = b^2 - 4ac$.

Dans ces conditions: $(1) \iff a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0$

$$\iff a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{a \times \Delta}{4a^2} = 0$$

$$\iff a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0$$

$$\iff a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] = 0,$$ avec: $\Delta \geqslant 0$.

Distinguons 3 cas:

Si $\Delta < 0$:

Dans ce cas, nous ne pouvons pas écrire $\sqrt{\Delta}$ et par conséquent: **l'équation du second degré n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}$.**

Si $\Delta = 0$:

Dans ce cas, nous pouvons écrire:

$$(1) \iff a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] = 0$$

$$\iff a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - 0\right] = 0$$

$$\iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0, \text{ car } a \neq 0$$

$$\iff x + \frac{b}{2a} = 0$$

$$\iff \boldsymbol{x = -\frac{b}{2a}}.$$

Par conséquent, dans ce cas, **l'équation du second degré admet une solution unique**: $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.

Si $\Delta > 0$:

Dans ce cas, nous pouvons écrire:

$$(1) \iff a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] = 0$$

$$\iff \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = 0, \text{ car } a \neq 0$$

$$\iff \left[\left(x+\frac{b}{2a}\right) - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right] \times \left[\left(x+\frac{b}{2a}\right) + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right] = 0$$

$$(\, a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \,)$$

$$\iff \left(x+\frac{b}{2a}\right) - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0 \quad \textbf{ou} \quad \left(x+\frac{b}{2a}\right) + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0$$

$$\iff x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \textbf{ou} \quad x = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Par conséquent, dans ce cas, **l'équation du second degré admet deux solutions distinctes**:

- $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
- $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.