1re

MATHÉMATIQUES

Enseignement de Spécialité

Équations du second degré

Mini Cours

☛ www.freemaths.fr

A. Résolution d'une équation du second degré:

Soit une fonction polynôme f du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = ax^2 + bx + c$ **où a, b et c sont des réels, avec a ≠ 0.**

Il s'agit de résoudre l'équation: $ax^2 + bx + c = 0.$

Etape 1: Calcul du discriminant Δ.

Le discriminant Δ est égal à: $\Delta = b^2 - 4ac.$

Etape 2: 3 cas en fonction du signe de Δ.

- **Si Δ < 0, l'équation n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}$.**

- **Si Δ = 0, l'équation admet une solution unique:** $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}.$

  (on dit: " une racine double ")

- **Si Δ > 0, l'équation admet deux solutions distinctes:** • $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

  (on dit: " deux racines distinctes ")

  • $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$

B. Réécriture de $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ à partir des racines:

1. Obtenir la forme factorisée:

- **Si Δ = 0:** $ax^2 + bx + c = 0 \iff a\cdot\left(x - \dfrac{b}{2a}\right)^2 = 0.$

$$\left(\text{donc: } f(x) = a\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2\right)$$

• Si $\Delta > 0$: $ax^2 + bx + c = 0 \iff a(x - x_1)(x - x_2) = 0.$

$$(\text{donc: } f(x) = a(x - x_1)(x - x_2))$$

2. Obtenir la forme canonique:

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0.$$

$$\left(\text{donc: } f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}\right)$$

C. Somme et produit des racines de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$):

Si l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) admet deux racines distinctes, alors:

- la somme des racines est: $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$,
- le produit des racines est: $P = x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a}$,
- $ax^2 + bx + c = 0 \iff x^2 - S \cdot x + P = 0.$

D. Démonstrations à connaître:

1. Théorème 1:

On considère l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$).

Soit: $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta < 0$, l'équation n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}$.

- Si $\Delta = 0$, l'équation admet une solution unique: $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.

- Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions distinctes:
  - $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$
  - $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

2. Théorème 2:

Si le polynôme du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) admet deux racines x_1 et x_2, alors: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

3. Théorème 3:

On considère le polynôme du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

Soit: $\Delta = b^2 - 4ac$.

Alors: $ax^2 + bx + c = a \cdot \left[\left(x + \dfrac{b}{2a} \right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2} \right]$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4. Théorème 4:

Si le polynôme du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) admet deux racines x_1 et x_2, alors: $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a}$.