1re

MATHÉMATIQUES

Enseignement de Spécialité

Taux de variation
&
Nombre dérivé

Correction

www.freemaths.fr

DÉRIVABLE EN " a " ?

CORRECTION

D'après le cours, nous savons que:

- le taux de variation ou **taux d'accroissement** de f entre a et $b = a + h$ $(h \neq 0)$ est: $\tau(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$,

- f est dérivable en " a " ssi: $\lim\limits_{h \to 0} \tau(h) = \ell$, **$\ell$ étant un nombre réel fini,**

- le nombre dérivé de f en " a " est: $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \tau(h)$.

1. $f(x) = -3x + 7$ et $a = 4$:

☞ **Le taux d'accroissement ?**

- Ici: $Df = \mathbb{R}$, $a = 4 \in \mathbb{R}$ et $b = a + h = 4 + h \in \mathbb{R}$.

- Dans ces conditions: $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \dfrac{f(4+h) - f(4)}{h}$

$$= \frac{(-3(4+h) + 7) - (-3 \times 4 + 7)}{h}$$

$$= -\frac{3h}{h}$$

$= -3.$

Ainsi: $\tau(h) = -3.$

☞ f est-elle dérivable en $a = 4$?

Comme $\lim\limits_{h \to 0} \tau(h) = -3$ (nombre réel fini): oui f est dérivable en $a = 4.$

☞ Le nombre dérivé de f en $a = 4$?

Il est égal à: $f'(a = 4) = \lim\limits_{h \to 0} \tau(h) = -3.$

2. $f(x) = 1 - x^2$ et $a = 1$:

☞ Le taux d'accroissement ?

- Ici: $Df = \mathbb{R}$, $a = 1 \in \mathbb{R}$ et $b = a + h = 1 + h \in \mathbb{R}.$

- Dans ces conditions: $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h}$

$$= \frac{(1 - (1+h)^2) - (1 - (1)^2)}{h}$$

$$= \frac{-(h^2 + 2h)}{h}$$

$$= -h - 2.$$

Ainsi: $\tau(h) = -h - 2.$

☞ f est-elle dérivable en $a = 1$?

$$\lim_{h \to 0} \tau(h) = \lim_{h \to 0} (-h-2) = -2.$$

Comme $\lim_{h \to 0} \tau(h) = -2$ (nombre réel fini): oui f est dérivable en $a = 1$.

☞ Le nombre dérivé de f en $a = 1$?

Il est égal à: $f'(a=1) = \lim_{h \to 0} \tau(h) = -2.$

3. $f(x) = \dfrac{1}{3x+1}$ et $a = 0$:

☞ Le taux d'accroissement ?

- Ici: $Df = \mathbb{R} - \{-\frac{1}{3}\}$, $a = 0 \in Df$ et $b = a + h = h \in Df.$

- Dans ces conditions: $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h}$

$$= \frac{\left(\frac{1}{3h+1}\right) - \left(\frac{1}{1}\right)}{h}$$

$$= \frac{\frac{-3h}{3h+1}}{h}$$

$$= \frac{-3}{3h+1}.$$

Ainsi: $\tau(h) = \dfrac{-3}{3h+1}.$

☞ f est-elle dérivable en $a = 0$?

$$\lim_{h \to 0} \tau(h) = \lim_{h \to 0} \frac{-3}{3h + 1} = -3.$$

Comme $\lim_{h \to 0} \tau(h) = -3$ (nombre réel fini): oui f est dérivable en $a = 0$.

☞ Le nombre dérivé de f en $a = 0$?

Il est égal à: $f'(a = 0) = \lim_{h \to 0} \tau(h) = -3.$

4. $f(x) = \dfrac{1}{1 - x}$ et $a = 2$:

☞ Le taux d'accroissement ?

• Ici: $Df = \mathbb{R} - \{1\}$, $a = 2 \in Df$ et $b = a + h = 2 + h \in Df.$

• Dans ces conditions: $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h}$

$$= \frac{\left(\frac{1}{1 - (2 + h)}\right) - \left(\frac{1}{1 - 2}\right)}{h}$$

$$= \frac{\frac{1 - 1 - h}{-1 - h}}{h}$$

$$= \frac{1}{1 + h}.$$

Ainsi: $\mathcal{T}(h) = \dfrac{1}{1+h}$.

☞ f est-elle dérivable en $a = 2$?

$$\lim_{h \to 0} \mathcal{T}(h) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{1+h} = 1.$$

Comme $\lim_{h \to 0} \mathcal{T}(h) = 1$ (nombre réel fini): oui f est dérivable en $a = 2$.

☞ Le nombre dérivé de f en $a = 2$?

Il est égal à: $f'(a = 2) = \lim_{h \to 0} \mathcal{T}(h) = 1$.

5. $f(x) = 7x + 2$ et $a = \sqrt{2}$:

☞ Le taux d'accroissement ?

• Ici: $Df = \mathbb{R}$, $a = \sqrt{2} \in \mathbb{R}$ et $b = a + h = \sqrt{2} + h \in \mathbb{R}$.

• Dans ces conditions: $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \dfrac{f(\sqrt{2}+h) - f(\sqrt{2})}{h}$

$$= \frac{(7(\sqrt{2}+h) + 2) - (7\sqrt{2} + 2)}{h}$$

$$= \frac{7h}{h}$$

$$= 7.$$

Ainsi: $\mathcal{T}(h) = 7$.

☞ f est-elle dérivable en $a = \sqrt{2}$?

Comme $\lim\limits_{h \to 0} \tau(h) = 7$ (nombre réel fini): oui f est dérivable en $a = \sqrt{2}$.

☞ Le nombre dérivé de f en $a = \sqrt{2}$?

Il est égal à: $f'(a = \sqrt{2}) = \lim\limits_{h \to 0} \tau(h) = 7$.

6. $f(x) = \dfrac{x+1}{2-x}$ et $a = 3$:

☞ Le taux d'accroissement ?

• Ici: $Df = \mathbb{R} - \{2\}$, $a = 3 \in Df$ et $b = a + h = 3 + h \in Df$.

• Dans ces conditions: $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \dfrac{f(3+h) - f(3)}{h}$

$$= \frac{\left(\dfrac{(3+h)+1}{2-(3+h)}\right) - \left(\dfrac{3+1}{2-3}\right)}{h}$$

$$= \frac{\dfrac{4+h}{-1-h} + 4}{h}$$

$$= \frac{3}{1+h}.$$

Ainsi: $\tau(h) = \dfrac{3}{1+h}$.

☞ f est-elle dérivable en $a = 3$?

$$\lim_{h \to 0} \tau(h) = \lim_{h \to 0} \frac{3}{1+h} = 3.$$

Comme $\lim_{h \to 0} \tau(h) = 3$ (nombre réel fini): oui f est dérivable en $a = 3$.

☞ Le nombre dérivé de f en $a = 3$?

Il est égal à: $f'(a = 3) = \lim_{h \to 0} \tau(h) = 3.$