

# 1re

# MATHÉMATIQUES

## Enseignement de Spécialité

## Dérivées de fonctions

**Mini Cours**

 [www.freemaths.fr](http://www.freemaths.fr)

## A. Dérivée d'une fonction:

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ .

- $f$  est **dérivable** sur un intervalle  $I$  lorsque  $f$  admet un nombre dérivé pour tout réel  $x$  de  $I$ , noté  $f'(x)$ .
- La fonction dérivée de  $f$  sur  $I$  est notée:  $f'$ .

## B. Tableau des dérivées:

Fonction	Domaine de définition	Domaine de dérivabilité	Fonction dérivée
$f(x) = k$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = m \cdot x + p$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = m$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^n$ ( $n \in \mathbb{N}^*$ )	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = n \cdot x^{(n-1)}$
$f(x) = a \cdot x^n + b$ ( $n \in \mathbb{N}^*$ )	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a \cdot n \cdot x^{(n-1)}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

$f(x) = \sqrt{x}$	$] 0; +\infty [$	$] 0; +\infty [$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) =  x $	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{pour } x < 0 \\ 1 & \text{pour } x > 0 \end{cases}$

## C. Opérations sur les fonctions dérivables:

Soient  $U$  et  $V$  deux fonctions dérivables sur un intervalle  $I$ .

- $(U + V)' = U' + V'$
- $(k \times U)' = k \times U'$
- $(U \times V)' = U' \times V + U \times V'$
- $\left(\frac{1}{V}\right)' = -\frac{V'}{V^2}$  ( $V \neq 0$  sur  $I$ )
- $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U' \times V - U \times V'}{V^2}$  ( $V \neq 0$  sur  $I$ ).

## D. Dérivée de $f(x) = g(m \cdot x + p)$ :

Soit  $g$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ .

Pour tout  $x$  réel tel que  $m \cdot x + p \in I$ , la fonction  $f(x) = g(m \cdot x + p)$

est dérivable et:  $f'(x) = m \times g'(m \cdot x + p)$ .

## E. Sens de variation d'une fonction:

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

- $f$  est croissante sur  $I$  ssi:  $f'(x) \geq 0$
- $f$  est strictement croissante sur  $I$  ssi:  $f'(x) > 0$
- $f$  est décroissante sur  $I$  ssi:  $f'(x) \leq 0$
- $f$  est strictement décroissante sur  $I$  ssi:  $f'(x) < 0$
- $f$  est constante sur  $I$  ssi:  $f'(x) = 0$ .

## F. Extremum:

### 1. Définition:

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ .

$f$  admet un extremum sur  $I$  si  $f$  admet un maximum ou un minimum sur  $I$ .

### 2. Propriété:

- Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $]a; b[$  et  $x_0$  un réel de cet intervalle.

Si  $f$  admet un maximum local ou un minimum local en  $x_0$ , alors:  $f'(x) = 0$ .

- Dans ce cas, la tangente à la courbe au point  $(x_0; f(x_0))$  est horizontale.

### 3. Tableau de variations et extremum:

Soit  $]a; b[$  un intervalle contenant "  $c$  ".

- Le point  $C(c; f(c))$  est un minimum local:

$x$	$a$	$c$	$b$	
$f'(x)$		$-$	$0$	$+$
$f(x)$				

- Le point  $C ( c; f(c) )$  est un **maximum local**:

$x$	$a$	$c$	$b$	
$f'(x)$		$+$	$0$	$-$
$f(x)$				

#### 4. Polynômes du second degré et extremum:

Soit  $f$  une fonction polynôme du second degré définie sur  $\mathbb{R}$  par:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ avec } a \neq 0.$$

- Si  $a > 0$ , le point  $A \left( -\frac{b}{2a}; f\left(-\frac{b}{2a}\right) \right)$  est un **minimum global**:

$x$	$-\infty$	$\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	$0$	$+$
$f(x)$				

- Si  $a < 0$ , le point  $A\left(-\frac{b}{2a}; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$  est un maximum global:

$x$	$-\infty$	$\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			