1^{re} Technologique Mathématiques

Événements & Probabilités

MINI COURS

A. Événements :

1. Quelques définitions :

- **Expérience aléatoire :** c'est une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat de façon certaine.

- **Univers Ω ou ensemble fondamental :** c'est l'ensemble de toutes les réalisations possibles d'une expérience aléatoire.

- **Événement A :** c'est une partie A de Ω constituée d'événements élémentaires.

- **$\overline{A}$:** c'est le complémentaire de A dans Ω.

  Ainsi, si l'événement A est réalisé, alors l'événement $\overline{A}$ n'est pas réalisé.

- **$X = A \cup B$:** il s'agit de A union B.

  La réalisation de l'événement X entraîne la réalisation de l'événement A ou de l'événement B, ou des deux événements A et B simultanément.

- **$Y = A \cap B$:** il s'agit de A inter B.

  La réalisation de l'événement Y entraîne la réalisation de l'événement A et de l'événement B.

- **$A \subset B$:** A inclus dans B.

  La relation $A \subset B$ exprime le fait que la réalisation de l'événement A implique celle de B.

- **$\emptyset$:** c'est l'ensemble vide.

  $\emptyset$ est appelé événement impossible car il n'est jamais réalisé.

2. Quelques propriétés :

- **Commutativité :** • $A \cup B = B \cup A$

  • $A \cap B = B \cap A$.

- **Associativité :** • $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$

  • $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$.

- **Distributivité :** • $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

  • $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

- **Autres propriétés :** • $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

  • $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

  • $\overline{\overline{A}} = A$

  • $A \cap \emptyset = \emptyset$

  • $A \cup \emptyset = A$

  • $A \cap \Omega = A$

  • $A \cup \Omega = \Omega$

  • $A \cap \overline{A} = \emptyset$

  • $A \cup \overline{A} = \Omega$.

3. Événements incompatibles :

A et B sont incompatibles ssi : $A \cap B = \emptyset$.

B. Probabilités :

1. Propriétés :

- $P(\Omega) = 1$.
- $P(\emptyset) = 0$.
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

2. Événements indépendants :

A et B sont indépendants ssi : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Dans ce cas : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$.

3. Événements incompatibles :

A et B sont incompatibles ssi : $A \cap B = \emptyset$, et donc $P(A \cap B) = 0$.

Dans ce cas : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

4. Démonstration à connaître :

A et B indépendants <=> $\overline{A}$ et B indépendants.

Supposons: A et B indépendants.

Dans ces conditions : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Or : $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$ (1)

(1) <=> $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$ (2).

Comme A et B sont indépendants : (2) $\iff$ $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A) \times P(B)$

$= P(B) \times (1 - P(A))$

$= P(B) \times P(\overline{A})$.

Donc : $P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \times P(B)$, ce qui permet d'affirmer que les événements $\overline{A}$ et B sont bien indépendants.

C. Probabilités conditionnelles :

1. Probabilité de B sachant A :

Soient A et B deux événements avec $P(A) \neq 0$.

La probabilité que l'événement B se réalise, sachant que l'événement A est réalisé, est notée $P_A(B)$ avec : $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

2. Propriétés avec $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$:

- $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$.
- $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$ ou $P_A(B) + P_A(\overline{B}) = 1$.
- Si A et B sont indépendants : $P_A(B) = P(B)$.
- Si A et B sont indépendants : $P_B(A) = P(A)$.

D. Probabilités totales :

1. Partition d'un univers :

Les événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ d'un univers Ω, de probabilités non nulles,

forment une partition de l'univers lorsqu'ils sont deux à deux incompatibles et $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$.

2. Formule des probabilités totales :

Soient les événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ d'un univers Ω, de probabilités non nulles, qui forment une partition de Ω.

Pour tout événement B de Ω, la formule des probabilités totales est :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \ldots + (A_n \cap B).$$

3. Conséquences :

- $P(B) = P_{A_1}(B) \times P(A_1) + P_{A_2}(B) \times P(A_2) + \ldots + P_{A_n}(B) \times P(A_n).$
- $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$

$$= P_A(B) \times P(A) + P_{\overline{A}}(B) \times P(\overline{A}).$$