1re Technologique Mathématiques

(STI2D)

Nombres Complexes Partie Géométrique

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

UN PEU DE GÉOMÉTRIE ! 1

CORRECTION

1. Le triangle CAB est-il rectangle isocèle en C ?

D'après le cours: un triangle CAB est rectangle et isocèle en C lorsque la longueur du côté [CA] est égale à la longueur du côté [CB], et que l'angle en C vaut 90°.

Or: • longueur du côté [CA] = longueur du côté [CB] ssi $|z_A - z_C| = |z_B - z_C|$,

• le triangle CAB est rectangle en C ssi $\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ est un imaginaire pur.

Ici: • $|z_A - z_C| = |3 + 2i - 1 + 2i|$

$= |2 + 4i|$

$= \sqrt{(2)^2 + (4)^2}$

$= \sqrt{20}$.

• $|z_B - z_C| = |-3 - 1 + 2i|$

$= |-4 + 2i|$

$= \sqrt{(-4)^2 + (2)^2}$

$= \sqrt{20}$.

Donc nous avons bien: $|z_A - z_C| = |z_B - z_C|$.

De plus: $\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \dfrac{-4+2i}{2+4i} = \dfrac{(-4+2i)(2-4i)}{(2+4i)(2-4i)} = i$.

Ainsi: $\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ est un imaginaire pur.

Au total, toutes les conditions sont réunies: le triangle CAB est donc rectangle et isocèle en C.

2. Déterminons la nature du triangle ABC:

Pour cela nous allons calculer: $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$.

D'après l'énoncé: $z_A = -2i$, $z_B = -\sqrt{3} + i$ et $z_C = \sqrt{3} + i$.

Dans ces conditions: $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \dfrac{-\sqrt{3} + i + 2i}{\sqrt{3} + i + 2i}$

$$= \frac{-\sqrt{3} + 3i}{\sqrt{3} + 3i}$$

$$= \frac{(-\sqrt{3} + 3i)(\sqrt{3} - 3i)}{(\sqrt{3} + 3i)(\sqrt{3} - 3i)}$$

$$= \frac{6 + 6i\sqrt{3}}{12}$$

$$= \frac{1}{2} + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Sous forme trigonométrique: $\frac{1}{2} + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 \times \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

Or, d'après le cours, le triangle est équilatéral direct quand:

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = 1 \times \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Au total, la nature du triangle ABC est: il s'agit d'un triangle équilatéral direct.

3. Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

D'après le cours, les droites (AB) et (CD) sont parallèles, ssi:

$$\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}.$$

Or ici: $z_A = 1 + i$, $z_B = -1 - 3i$, $z_C = 2 + 5i$ et $z_D = -2 - 3i$.

Dans ces conditions:
- $z_D - z_C = -2 - 3i - (2 + 5i) = -4 - 8i$,
- $z_B - z_A = -1 - 3i - (1 + i) = -2 - 4i$.

Ainsi: $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = \frac{-4 - 8i}{-2 - 4i}$ cad $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = 2 \in \mathbb{R}$.

Comme $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$, nous pouvons affirmer que: les droites (AB) et (CD) sont bien parallèles.