

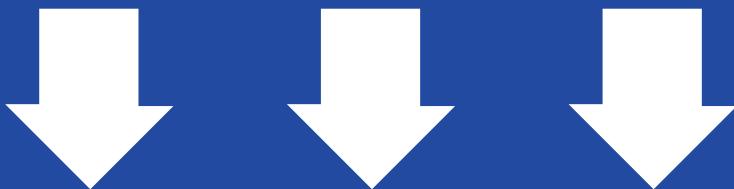
1^{re}

Technologique

Mathématiques

(STI2D)

Nombres Complexes
Partie Géométrique



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

L'ENSEMBLE DES POINTS M...

5

CORRECTION

Déterminons l'ensemble E des points M(z) tels que: $\left(\frac{z-i-1}{z+1}\right) \in \mathbb{R}_*,$ avec $z \neq -1.$

- Pour tout $z \neq -1$ avec $z = x + iy,$ nous avons:

$$\begin{aligned} \frac{z-i-1}{z+1} &= \frac{x+iy-i-1}{x+iy+1} \\ &= \frac{(x-1)+i(y-1)}{(x+1)+iy} \\ &= \frac{[(x-1)+i(y-1)] \times [(x+1)-iy]}{[(x+1)+iy] \times [(x+1)-iy]} \\ &= \frac{x^2+y^2-y-1+2iy-ix-i}{(x+1)^2+y^2} \\ &= \frac{(x^2+y^2-y-1)}{(x+1)^2+y^2} + i \times \frac{(-x+2y-1)}{(x+1)^2+y^2}, \text{ avec } z \neq -1. \end{aligned}$$

- Or $\left(\frac{z-i-1}{z+1}\right) \in \mathbb{R}_*$ et $z \neq -1.$

D'où le système: $\begin{cases} z \neq -1 \\ -x + 2y - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - y - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z \neq -1 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 < \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z \neq -1 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ x^2 + \left(\frac{1}{2}x\right)^2 < \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z \neq -1 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ \frac{5}{4}x^2 < \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z \neq -1 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ x^2 < \frac{3}{5} \end{cases}$$

- Au total, l'ensemble E des points M(z) est:

$$E = \left\{ (x; y) \in \mathbb{R}^2 / \begin{array}{l} x + iy \neq -1 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ x \in \left[-\sqrt{\frac{3}{5}}, \sqrt{\frac{3}{5}} \right] \end{array} \right\}.$$