1re Technologique Mathématiques

(STI2D)

Nombres Complexes
Partie Géométrique

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

L'ENSEMBLE DES POINTS M... 3

CORRECTION

Déterminons l'ensemble E des points M (z) tels que: $\left(\frac{z - i - 1}{z + 1}\right) \in i\,\mathbb{R}^*_-$, avec $z \neq -1$.

• Pour tout $z \neq -1$ avec $z = x + iy$, nous avons:

$$\frac{z - i - 1}{z + 1} = \frac{x + iy - i - 1}{x + iy + 1}$$

$$= \frac{(x - 1) + i\,(y - 1)}{(x + 1) + iy}$$

$$= \frac{[(x - 1) + i\,(y - 1)] \times [(x + 1) - iy]}{[(x + 1) + iy] \times [(x + 1) - iy]}$$

$$= \frac{x^2 + y^2 - y - 1 + 2iy - ix - i}{(x + 1)^2 + y^2}$$

$$= \frac{(x^2 + y^2 - y - 1)}{(x + 1)^2 + y^2} + i \times \frac{(-x + 2y - 1)}{(x + 1)^2 + y^2}, \text{ avec } z \neq -1.$$

• Or $\left(\frac{z - i - 1}{z + 1}\right) \in i\,\mathbb{R}^*_-$ et $z \neq -1$.

D'où le système: $\begin{cases} z \neq -1 \\ \dfrac{x^2 + y^2 - y - 1}{(x+1)^2 + y^2} = 0 \\ \dfrac{-x + 2y - 1}{(x+1)^2 + y^2} < 0 \end{cases}$ <=> $\begin{cases} z \neq -1 \\ x^2 + y^2 - y - 1 = 0 \\ -x + 2y - 1 < 0 \end{cases}$

<=> $\begin{cases} z \neq -1 \\ x^2 + \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{4} = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2. \\ y < \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2} \end{cases}$

- Au total, l'ensemble E des points M (z) correspond: au demi-cercle de centre le point A de coordonnées $\left(0 ; \dfrac{1}{2}\right)$ et de rayon $R = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ situé sous la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$.