

www.freemaths.fr

1^{re}

Technologique Mathématiques

(STI2D)

Nombres Complexes
Partie Géométrique



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

L'ENSEMBLE DES POINTS M...

1

CORRECTION

1. Rappelons l'équation d'un cercle de centre A (a, b) et de rayon R:

L'équation d'un cercle de centre A (a, b) et de rayon R s'écrit:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

2. Rappelons l'équation d'un disque de centre A (a, b) et de rayon R:

L'équation d'un disque de centre A (a, b) et de rayon R s'écrit:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq R^2.$$

3. a. Déterminons l'ensemble des points M (z) tels que: $z' \in \mathbb{R}, z \neq -1$

$$\text{et } z' = \frac{z - i - 1}{z + 1}.$$

• Pour tout $z \neq -1$ avec $z = x + iy$, nous avons:

$$z' = \frac{z - i - 1}{z + 1} \Leftrightarrow z' = \frac{x + iy - i - 1}{x + iy + 1}$$

$$\Leftrightarrow z' = \frac{(x - 1) + i(y - 1)}{(x + 1) + iy}$$

$$\Leftrightarrow z' = \frac{[(x-1) + i(y-1)] \times [(x+1) - iy]}{(x+1)^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow z' = \frac{x^2 - 1 - iy(x-1) + i(y-1)(x+1) + y(y-1)}{(x+1)^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow z' = \frac{(x^2 + y^2 - y - 1)}{(x+1)^2 + y^2} + i \times \frac{(2y - x - 1)}{(x+1)^2 + y^2}.$$

- Or $z' \in i\mathbb{R}$ et $z \neq -1$.

D'où le système:

$$\begin{cases} z \neq -1 \\ \frac{x^2 + y^2 - y - 1}{(x+1)^2 + y^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z \neq -1 \\ x^2 + y^2 - y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z \neq -1 \\ x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \end{cases}$$

- Au total, l'ensemble des points $M(z)$ correspond: au cercle de centre

le point $A\left(0; \frac{1}{2}\right)$ et de rayon $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$, privé du point $B(-1)$.

3. b. Déterminons l'ensemble des points $M(z)$ tels que: $|z - 2 - i| = 3$.

- Pour tout $z = x + iy$, nous avons:

$$|z - 2 - i| = 3 \Leftrightarrow |x + iy - 2 - i| = 3$$

$$\Leftrightarrow |(x-2) + i(y-1)| = 3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = 3$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = (3)^2.$$

- Au total, l'ensemble des points $M(z)$ correspond: au cercle de centre le point $A(2;1)$ et de rayon $R=3$.

3. c. Déterminons l'ensemble des points $M(z)$ tels que: $|\bar{z} + i| \leq 2$.

- Pour tout $z = x + iy$, nous avons:

$$|\bar{z} + i| \leq 2 \Leftrightarrow |\overline{x + iy} + i| \leq 2$$

$$\Leftrightarrow |x - iy + i| \leq 2$$

$$\Leftrightarrow |x + i(-y + 1)| \leq 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (-y + 1)^2} \leq 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (1 - y)^2 \leq 4 \quad \text{cad} \quad x^2 + (y - 1)^2 \leq (2)^2.$$

- Au total, l'ensemble des points $M(z)$ correspond: au disque fermé de centre $A(0;1)$ et de rayon $R=2$.