1re Technologique Mathématiques

(STI2D)

Nombres Complexes
Forme Algébrique

MINI COURS

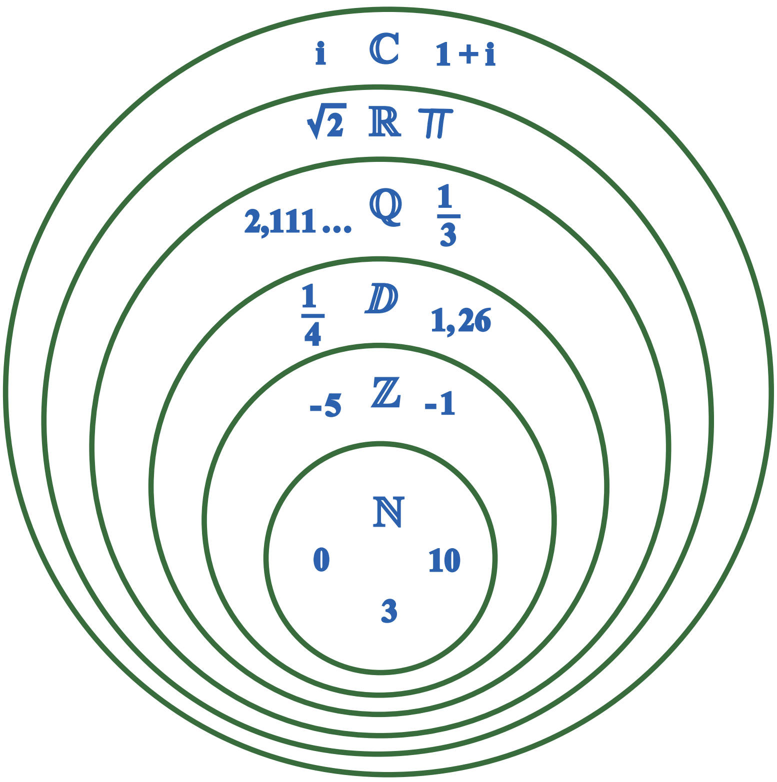
A. Ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes :

1. L'ensemble $\mathbb{C}$:

Il existe un ensemble $\mathbb{C}$, appelé ensemble des nombres complexes, contenant $\mathbb{R}$ et pour lequel :

- **les règles de calcul restent les mêmes que dans $\mathbb{R}$,**
- **il existe un nombre réel dans $\mathbb{C}$, noté i, tel que $i^2 = -1$,**
- **tout élément de $\mathbb{C}$ s'écrit sous la forme $z = x + i \cdot y$ (où x et y sont réels),**
- **le nombre 0 s'écrit $0 + i \cdot 0$.**

2. Schéma :



B. Forme algébrique d'un nombre complexe :

1. Définition :

Tout nombre complexe z peut s'écrire **sous forme algébrique** :

$$z = x + i \cdot y, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad y \in \mathbb{R}.$$

2. Propriétés :

- deux nombres complexes $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ sont égaux ssi :

$$x = x' \quad \text{et} \quad y = y',$$

- soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$: $z + z' = (x + x') + i\,(y + y')$,
- soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$: $z \cdot z' = (xx' - yy') + i\,(xy' + yx')$,

(car : $i^2 = -1$)

- x se nomme **la partie réelle de z** et se note $\mathrm{Re}\,(z)$,
- y se nomme **la partie imaginaire de z** et se note $\mathrm{Im}\,(z)$.

C. Réel ou imaginaire pur ?

Soit $z = x + i \cdot y$, un nombre complexe :

- le nombre z est dit **réel** si $y = 0$
- le nombre z est dit **imaginaire pur** si $x = 0$.

D. Conjugué d'un nombre complexe :

1. Définition :

Tout nombre complexe $z = x + iy$ admet un nombre **conjugué** noté $\bar{z}$ avec : $\bar{z} = x - i \cdot y$.

2. Exemples :

- si $z = 2 + 3i$, alors : $\bar{z} = 2 - 3i$
- si $z = 2 + 4i$, alors : $\bar{z} = 2 - 4i$
- si $z = 3$, alors : $\bar{z} = 3$
- si $z = 7i$, alors : $\bar{z} = -7i$.

3. Relations :

Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, deux nombres complexes :

- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$
- $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\bar{z'}}$, $z' \neq 0$
- $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$, $n \in \mathbb{N}$
- $\overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z'}$.

4. Propriétés :

- $\bar{\bar{z}} = z$
- $z + \bar{z} = 2x = 2\,\text{Re}\,(z)$
- $z - \bar{z} = 2iy = 2i\,\text{Im}\,(z)$

- z est un réel ssi $z = \bar{z}$

- z est un imaginaire pur ssi $z = -\bar{z}$

- $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$.

E. Module d'un nombre complexe :

1. Définition :

Soit $z = x + iy$. Le module de z, noté $r = |z|$, est le réel positif ou nul :

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

2. Exemples :

- si $z = 1 + i$: $|z| = \sqrt{2}$ cad $r = \sqrt{2}$

- si $z = 1 - i$: $|z| = \sqrt{2}$ cad $r = \sqrt{2}$

- si $z = 1 - i\sqrt{3}$: $|z| = 2$ cad $r = 2$.

3. Propriétés :

Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, deux nombres complexes :

- $|z| \geqslant 0$

- $|z| = 0 \iff z = 0$

- $|\alpha \cdot z| = \sqrt{\alpha^2} \cdot |z|$

- $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$

- $|z| = |\bar{z}|$

- $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$

- $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$, $z' \neq 0$

- $|z^n| = |z|^n$, $n \in \mathbb{N}$.

F. Ensemble $\mathbb{U}$ des complexes de module 1 :

1. Définition :

$\mathbb{U}$ est l'ensemble des nombres complexes **de module égal à 1** :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| = 1\}.$$

2. Exemples :

- $z = 1$.

- $z = i$.

- $z = -i$.

- $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.