1re Technologique Mathématiques

Études de Fonctions

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

LA VEILLE SANITAIRE

CORRECTION

1. a. Déterminons $f'(0)$ par lecture graphique:

D'après l'énoncé: " la droite T est la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $x = 0$ et passe par le point A de coordonnées (4 ; 45) ".

Dans ces conditions, par lecture graphique: $f'(0) = \dfrac{45 - 0}{4 - 0} = 11,25$.

1. b. Déduisons-en l'équation réduite de la tangente T:

La droite T passe par les points O (0 ; 0) et A (4 ; 45).

Soit " a " le coefficient directeur de cette droite, " a " est tel que:

$$a = \frac{y_A - y_O}{x_A - x_O} \text{ cad } a = \frac{45 - 0}{4 - 0} = \frac{45}{4}.$$

Or la droite T a pour équation: $y = a \times x + b$, d'où: $y = \dfrac{45}{4} \times x + b$.

De plus, T passe par le point O (0 ; 0), d'où: $0 = \dfrac{45}{4} \times 0 + b$ cad $b = 0$.

Ainsi, une équation réduite de la tangente T est: $y = \dfrac{45}{4}x$.

2. a. Calculons $f'(t)$:

La fonction f est dérivable sur $[0; 11]$, avec : $f(t) = -t^3 + \frac{21}{2}t^2 + \frac{45}{4}t$.

D'où, nous pouvons calculer f' sur $[0; 11]$:

$$f'(t) = -3t^2 + 21t + \frac{45}{4}$$

$$= -3\left(t^2 - 7t - \frac{15}{4}\right).$$

Ainsi, la dérivée de la fonction f, pour tout $t \in [0; 11]$ est :

$$f'(t) = -3\left(t^2 - 7t - \frac{15}{4}\right).$$

2. b. b1. Montrons que pour tout $t \in [0; 11]$, $f'(t) = -3\left(t + \frac{1}{2}\right)\left(t - \frac{15}{2}\right)$:

Pour tout $t \in [0; 11]$: $-3\left(t + \frac{1}{2}\right)\left(t - \frac{15}{2}\right) = -3\left(t^2 - \frac{15}{2}t + \frac{1}{2}t - \frac{15}{4}\right)$

$$= -3\left(t^2 - 7t - \frac{15}{4}\right)$$

$$= f'(t).$$

Donc pour tout $t \in [0; 11]$, nous avons bien : $f'(t) = -3\left(t + \frac{1}{2}\right)\left(t - \frac{15}{2}\right)$.

2. b. b2. Étudions le signe de $f'(t)$ et déduisons-en le tableau de variation de f :

Distinguons 3 cas :

- $f'(t) > 0$ ssi $t \in \left[0; \frac{15}{2}\right[$
- $f'(t) = 0$ ssi $t = \frac{15}{2}$
- $f'(t) < 0$ ssi $t \in \left]\frac{15}{2}; 11\right]$

Ainsi le signe de f' sur $[0; 11]$ est:

- strictement positif sur $\left[0; \frac{15}{2}\right[$
- nul si $t = \frac{15}{2}$
- strictement négatif sur $\left]\frac{15}{2}; 11\right]$.

Et le tableau de variation de f sur $[0; 11]$ est le suivant:

t	0		$\frac{15}{2}$		11
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	a	$\nearrow$	b	$\searrow$	c

, avec:

- $a = f(0) = 0$
- $b = f\left(\frac{15}{2}\right) = 253,125$
- $c = f(11) = 63,25$.

3. **Déduisons-en le nombre maximal de malades:**

La fonction f est croissante sur $\left[0; \frac{15}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{15}{2}; 11\right]$.

Elle présente donc un maximum quand: $t = 7,5$ jours.

$f(7,5) = b = 253,125 \times 1000$ malades.

Ainsi, c'est au bout de 7 jours et demi que le nombre de malades sera maximal, et ce dernier sera égal à 253 125.