

Mathématiques

Enseignement Scientifique

Suites Numériques



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

SUITES DÉFINIES PAR RÉCURRENCE ET SENS DE VARIATION

CORRECTION

1. Étudions le sens de variation de la suite (U_n) :

Pour déterminer le sens de variation de la suite (U_n) , nous allons étudier le signe de: $U_{n+1} - U_n$.

$$U_{n+1} - U_n = \left(\frac{U_n + 1}{2U_n + 3} \right) - \left(\frac{U_{n-1} + 1}{2U_{n-1} + 3} \right)$$

$$= \frac{U_n - U_{n-1}}{(2U_n + 3)(2U_{n-1} + 3)}, \text{ avec: } U_n > 0 \text{ d'après l'énoncé.}$$

Or: $2U_n + 3 > 0$ et $2U_{n-1} + 3 > 0$ car pour tout nombre n de \mathbb{N} , $U_n > 0$.

Dans ces conditions, $(2U_n + 3)(2U_{n-1} + 3) > 0$ et donc le signe de $U_{n+1} - U_n$ dépend du signe de $U_n - U_{n-1}$, qui dépend du signe de $U_{n-1} - U_{n-2}$ qui dépend du signe de ... qui dépend du signe de $U_1 - U_0 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3} > 0$. (car: $U_1 = \frac{1}{3}$)

Ainsi: $U_{n+1} - U_n > 0$, et donc $U_{n+1} > U_n$.

La suite (U_n) est donc: **strictement croissante sur \mathbb{N} .**

2. Étudions le sens de variation de la suite (U_n) :

Pour déterminer le sens de variation de la suite (U_n) , nous allons étudier le signe de $U_{n+1} - U_n$.

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= (\sqrt{1+2U_n} - 1) - (\sqrt{1+2U_{n-1}} - 1) \\ &= \sqrt{1+2U_n} - \sqrt{1+2U_{n-1}}, \text{ avec: } U_n > 0 \text{ d'après l'énoncé.} \end{aligned}$$

Supposons $U_{n+1} - U_n \leq 0$ et vérifions si cela est vrai.

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n \leq 0 &\Leftrightarrow \sqrt{1+2U_n} \leq \sqrt{1+2U_{n-1}} \\ &\Leftrightarrow 1+2U_n \leq 1+2U_{n-1} \quad (\text{en élevant au carré}) \\ &\Leftrightarrow 2U_n \leq 2U_{n-1} \\ &\Leftrightarrow U_n - U_{n-1} \leq 0. \end{aligned}$$

Donc le signe de $U_{n+1} - U_n$ dépend du signe de $U_n - U_{n-1}$, qui dépend du signe de $U_{n-1} - U_{n-2}$, qui dépend du signe de ... qui dépend du signe de la différence de $U_1 - U_0 = 2 - 4 = -2 < 0$. (car: $U_1 = 2$)

Dans ces conditions, oui nous avons bien $U_{n+1} - U_n \leq 0$ car $U_{n+1} - U_n < 0$.

Ainsi: $U_{n+1} - U_n < 0$, et donc $U_{n+1} < U_n$.

La suite (U_n) est donc: strictement décroissante sur \mathbb{N} .

3. Étudions le sens de variation de la suite (U_n) :

Pour déterminer le sens de variation de la suite (U_n) , nous allons étudier le signe de $U_{n+1} - U_n$.

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{u_n}{1+3u_n} \right) - u_n$$

$$= \frac{-3u_n^2}{1+3u_n}, \text{ avec: } u_n > 0 \text{ d'après l'énoncé.}$$

Or: $1+3u_n > 0$ et $-3u_n^2 < 0$ car pour tout nombre n de \mathbb{N} , $u_n > 0$.

Ainsi: $u_{n+1} - u_n < 0$, et donc $u_{n+1} < u_n$.

La suite (u_n) est donc: strictement décroissante sur \mathbb{N} .