1ère

Mathématiques Enseignement Scientifique

Suites Numériques

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

SUITE DÉCROISSANTE DÉFINIE PAR RÉCURRENCE

CORRECTION

1. Calculons U_1, U_2 et U_3:

- $U_1 = \frac{U_0}{2} + \frac{1}{U_0}$ cad $U_1 = \frac{3}{2}$,
- $U_2 = \frac{U_1}{2} + \frac{1}{U_1}$ cad $U_2 = \frac{17}{12}$,
- $U_3 = \frac{U_2}{2} + \frac{1}{U_2}$ cad $U_3 = \frac{577}{408}$.

2. Montrons que la suite (U_n) est décroissante sur $\mathbb{N}^*$:

Pour déterminer le sens de variation de la suite (U_n), nous allons étudier le signe de: $U_{n+1} - U_n$.

$$U_{n+1} - U_n = \left(\frac{U_n}{2} + \frac{1}{U_n}\right) - U_n$$

$$= \frac{-U_n^2 + 2}{2U_n}, \text{ avec: } U_n > 0 \text{ d'après l'énoncé.}$$

Or: $2U_n > 0$ car pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $U_n > 0$.

Dans ces conditions, le signe de $U_{n+1} - U_n$ dépend du signe de $-U_n^2 + 2$.

D'où la suite (U_n) est décroissante ssi: $U_{n+1} - U_n \leqslant 0$.

$U_{n+1} - U_n \leqslant 0$ ssi $-U_n^2 + 2 \leqslant 0$ cad ssi $U_n \geqslant \sqrt{2}$.

Or: $U_0 = 1 < \sqrt{2}$, $U_1 > \sqrt{2}$, $U_2 > \sqrt{2}$ et $U_3 > \sqrt{2}$.

Ainsi: $U_{n+1} - U_n \leqslant 0$ cad $U_{n+1} \leqslant U_n$ **uniquement à partir du rang $n = 1$.**

La suite (U_n) est donc: décroissante pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, c'est-à-dire décroissante sur $\mathbb{N}^*$.