

# Mathématiques

## Enseignement Scientifique

### Suites Numériques



**CORRIGÉ** DE L'EXERCICE

# SUITE, $f$ ET LIMITE

## CORRECTION

1. Étudions le sens de variation de la suite  $(U_n)$  en passant par une fonction  $f$  que l'on déterminera:

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par:  $f(x) = 5 + \frac{3}{2x+1}$ .  $\left(5 + \frac{u}{v}\right)$

$f$  est dérivable sur  $[0; +\infty[$  et nous avons pour tout  $x$  appartenant à  $[0; +\infty[$ :

$$f'(x) = 0 + \frac{0 \times (2x+1) - 3 \times (2)}{(2x+1)^2} \quad \text{cad} \quad f'(x) = \frac{-6}{(2x+1)^2} < 0.$$

$$\left(\frac{u'v - uv'}{v^2}\right)$$

Sur  $[0; +\infty[$ ,  $f$  est donc: strictement décroissante.

Nous pouvons alors dresser le tableau de variations suivant:

$x$	0	$+\infty$
$f'$	-	
$f$	$a$	$b$

, avec:

- $a = f(0) = 8$
- $b = ?$

D'après le cours: " lorsque  $U_n = f(n)$ ,  $f$  étant une fonction définie sur  $[0; +\infty[$ , les variations de la suite  $(U_n)$  suivent celles de  $f$ ."

Ici, pour tout entier naturel  $n \in \mathbb{N}$ :  $U_n = 5 + \frac{3}{2n+1}$

ou encore:  $f(n) = 5 + \frac{3}{2n+1}$ .

Ainsi, pour tout entier naturel  $n \in \mathbb{N}$ : la suite  $(U_n)$  a le même sens de variation que la fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$ .

La suite  $(U_n)$  est donc: strictement décroissante sur  $\mathbb{N}$ .

## 2. Conjecturons la limite de la suite:

Nous avons: •  $U_0 = 5 + \frac{3}{1}$

•  $U_1 = 5 + \frac{3}{3}$

•  $U_2 = 5 + \frac{3}{5}$

•  $U_3 = 5 + \frac{3}{7}$

•  $U_4 = 5 + \frac{3}{9}$ .

Comme  $\frac{3}{9} < \frac{3}{7} < \frac{3}{5} < \frac{3}{3} < \frac{3}{1}$ : la suite  $(U_n)$  semble tendre vers 5.

Et nous pouvons écrire:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = b = 5$ .

## 3. Déterminons le plus petit entier " a " tel que $|U_a - 5| \leq 0,1\%$ :

$$|u_a - 5| \leq 0,1\% \Leftrightarrow \frac{3}{2a+1} \leq 0,001 \quad \left( \text{car: } \frac{3}{2a+1} > 0 \right)$$

$$\Leftrightarrow 3 \leq 0,002a + 0,001$$

$$\Leftrightarrow a \geq 1499,5.$$

Ainsi le plus petit entier " a " tel que  $|u_a - 5| \leq 0,1\%$  est:  $a = 1500$ .

(car:  $a \in \mathbb{N}$ )