www.freemaths.fr

1ère

Mathématiques
Enseignement Scientifique

Suites Numériques

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

SENS DE VARIATION ET SUITES À TERMES STRICTEMENT POSITIFS

CORRECTION

1. Calculons U_0 et U_1 :

a. $U_0 = \frac{0}{0+2}$ cad $U_0 = 0$ et $U_1 = \frac{1}{1+2}$ cad $U_1 = \frac{1}{3}$.

b. $U_0 = \frac{2 \times 0}{0+3}$ cad $U_0 = 0$ et $U_1 = \frac{2 \times 1}{1+3}$ cad $U_1 = \frac{1}{2}$.

c. $U_0 = 3 + 0,5^0$ cad $U_0 = 3$ et $U_1 = 3 + 0,5^1$ cad $U_1 = 3,5$.

d. $U_0 = \frac{0}{3^0}$ cad $U_0 = 0$ et $U_1 = \frac{1}{3^1}$ cad $U_1 = \frac{1}{3}$.

e. $U_0 = 2 + \frac{1}{0+3}$ cad $U_0 = \frac{7}{3}$ et $U_1 = 2 + \frac{1}{1+3}$ cad $U_1 = \frac{9}{4}$.

2. Conjecturons le sens de variation de chaque suite :

a. Comme $U_0 = 0$ et $U_1 = \frac{1}{3}$, on pourrait, a priori, penser que la suite (U_n) est croissante.

b. Comme $U_0 = 0$ et $U_1 = \frac{1}{2}$, on pourrait, a priori, penser que la suite (U_n) est croissante.

c. Comme $U_0 = 3$ et $U_1 = 3,5$, on pourrait, a priori, penser que la suite (U_n) est croissante.

d. Comme $U_0 = 0$ et $U_1 = \frac{1}{3}$, on pourrait, a priori, penser que la suite (U_n) est croissante.

e. Comme $U_0 = \frac{7}{3}$ et $U_1 = \frac{9}{4}$, on pourrait, a priori, penser que la suite (U_n) est décroissante.

3. Déterminons le sens de variation exact de chaque suite:

a. Pour tout entier naturel n, nous savons que: $U_n = \frac{n}{n+2}$.

Dans ces conditions, pour tout entier naturel n:

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{(n+1)}{(n+1)+2}}{\frac{n}{n+2}}$$

$$= \frac{(n+1) \times (n+2)}{(n+3) \times n}$$

$$= \frac{n^2 + 3n + 2}{n^2 + 3n}.$$

Ainsi, $\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$ car: $n^2 + 3n + 2 > n^2 + 3n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Comme (U_n) est une suite à termes strictement positifs et que $\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$,

nous pouvons affirmer que: la suite (U_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

$(U_{n+1} - U_n > 0)$

b. Pour tout entier naturel n, nous savons que: $U_n = \dfrac{2n}{n+3}$.

Dans ces conditions, pour tout entier naturel n:

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\dfrac{2(n+1)}{(n+1)+3}}{\dfrac{2n}{n+3}}$$

$$= \frac{2(n+1) \times (n+3)}{(n+4) \times 2n}$$

$$= \frac{2n^2 + 8n + 6}{2n^2 + 8n}.$$

Ainsi, $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} > 1$ car: $2n^2 + 8n + 6 > 2n^2 + 8n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Comme (U_n) est une suite à termes strictement positifs et que $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} > 1$,

nous pouvons affirmer que: la suite (U_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

$$(U_{n+1} - U_n > 0)$$

c. Pour tout entier naturel n, nous savons que: $U_n = 3 + 0,5^n$.

Dans ces conditions, pour tout entier naturel n:

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{3 + 0,5^{(n+1)}}{3 + 0,5^n}$$

$$= \frac{3 + 0,5 \times 0,5^n}{3 + 0,5^n}.$$

Ainsi, $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

En effet, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$: $3 + 0,5 \times 0,5^n < 3 + 0,5^n$.

(car: $0,5 < 1$)

Comme (U_n) est une suite à termes strictement positifs et que $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$,

à partir de tout entier naturel $n \geqslant 1$, **nous pouvons affirmer que**: **la suite (U_n) est strictement décroissante à partir de $n \geqslant 1$.** $(U_{n+1} - U_n < 0)$

d. Pour tout entier naturel n, nous savons que: $U_n = \frac{n}{3^n}$.

Dans ces conditions, pour tout entier naturel n:

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{(n+1)}{3^{(n+1)}}}{\frac{n}{3^n}}$$

$$= \frac{3^n \times (n+1)}{3^{(n+1)} \times n}$$

$$= \frac{n+1}{3n}.$$

Ainsi, $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

En effet, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$: $n + 1 < 3n$ cad $2n - 1 > 0$.

(car: $n > \frac{1}{2}$)

Comme (U_n) est une suite à termes strictement positifs et que $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$,

à partir de tout entier naturel $n \geq 1$, **nous pouvons affirmer que**: **la suite (U_n) est strictement décroissante à partir de $n \geq 1$.** $(U_{n+1} - U_n < 0)$

e. Pour tout entier naturel n, nous savons que: $U_n = 2 + \frac{1}{n+3}$.

Dans ces conditions, pour tout entier naturel n:

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2 + \frac{1}{(n+1)+3}}{2 + \frac{1}{n+3}}$$

$$= \frac{\frac{2(n+4)+1}{(n+4)}}{\frac{2(n+3)+1}{(n+3)}}$$

$$= \frac{(2n+9)(n+3)}{(n+4)(2n+7)}$$

$$= \frac{2n^2 + 15n + 27}{2n^2 + 15n + 28}.$$

Ainsi, $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$ car: $2n^2 + 15n + 27 < 2n^2 + 15n + 28$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(car: $27 < 28$)

Comme (U_n) est une suite à termes strictement positifs et que $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$,

nous pouvons affirmer que: **la suite (U_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.**

$(U_{n+1} - U_n < 0)$