www.freemaths.fr

1ère

Mathématiques
Enseignement Scientifique

Suites Numériques

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

ÉTUDE DE LA MONOTONIE D'UNE SUITE

CORRECTION

1. Rappelons ce que signifie " étudier la monotonie d'une suite ":

D'après le cours, une suite monotone est une suite qui est soit croissante, soit décroissante.

De même, une suite strictement monotone est une suite qui est soit strictement croissante, soit strictement décroissante.

Ainsi " étudier la monotonie d'une suite " revient à savoir si: la suite est (strictement) croissante ou (strictement) décroissante.

2. a. Étudions la monotonie de la suite (U_n), avec $U_n = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n$ $(n \in \mathbb{N})$:

Cela revient à déterminer le sens de variation de la suite (U_n).

$$U_{n+1} - U_n = \left[1 + \left(\frac{1}{3}\right)^{(n+1)}\right] - \left[1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right]$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^{(n+1)} - \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(\frac{1}{3} - 1\right)$$

Freemaths : Tous droits réservés

$$= -\frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n < 0, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Ainsi: $U_{n+1} - U_n < 0$, et donc $U_{n+1} < U_n$.

La suite (U_n) est donc: strictement décroissante sur $\mathbb{N}$ (strictement monotone).

2. b. Étudions la monotonie de la suite (U_n), avec $U_n = 2^n - n$ $(n \in \mathbb{N})$:

Cela revient à déterminer le sens de variation de la suite (U_n).

$$U_{n+1} - U_n = [\, 2^{(n+1)} - (n+1) \,] - [\, 2^n - n \,]$$

$$= 2 \times 2^n - n - 1 - 2^n + n$$

$$= 2^n - 1 \geq 0, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Ainsi: $U_{n+1} - U_n \geq 0$, et donc $U_{n+1} \geq U_n$.

La suite (U_n) est donc: croissante sur $\mathbb{N}$ (monotone).

2. c. Étudions la monotonie de la suite (U_n), avec $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$:

Cela revient à déterminer le sens de variation de la suite (U_n).

$$U_{n+1} - U_n = \left[\, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)} \,\right] - \left[\, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \,\right]$$

$$= \frac{1}{(n+1)} > 0, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Ainsi: $U_{n+1} - U_n > 0$, et donc $U_{n+1} > U_n$.

La suite (U_n) est donc: strictement croissante sur $\mathbb{N}^*$ (strictement monotone).

Freemaths : Tous droits réservés

2. d. Étudions la monotonie de la suite (U_n), avec $U_n = n \times 2^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$:

Cela revient à déterminer le sens de variation de la suite (U_n).

Ici (U_n) est une suite à termes strictement positifs.

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(n+1) \times 2^{(n+1)}}{n \times 2^n}$$

$$= \frac{2 \times n \times 2^n + 2 \times 2^n}{n \times 2^n}$$

$$= \frac{2\,(n+1)}{n} > 1, \text{ car pour tout } n \in \mathbb{N}^*: \quad 2\,(n+1) > n.$$

Ainsi: $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} > 1$, et donc $U_{n+1} > U_n$.

La suite (U_n) est donc: strictement croissante sur $\mathbb{N}^*$ (strictement monotone).

2. e. Étudions la monotonie de la suite (U_n), avec $U_n = 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \dots \times \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$:

Cela revient à déterminer le sens de variation de la suite (U_n).

Ici (U_n) est une suite à termes strictement positifs.

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \dots \times \frac{1}{n} \times \frac{1}{(n+1)}}{1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \dots \times \frac{1}{n}}$$

$$= \frac{1}{(n+1)} < 1, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Ainsi: $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} < 1$, et donc $U_{n+1} < U_n$.

Freemaths : Tous droits réservés

La suite (U_n) est donc: strictement décroissante sur $\mathbb{N}^*$ (strictement monotone).

2. f. Étudions la monotonie de la suite (U_n), avec $U_n = \dfrac{3^n \sqrt{n}}{5^n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$):

Cela revient à déterminer le sens de variation de la suite (U_n).

Ici (U_n) est une suite à termes strictement positifs.

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\dfrac{3^{(n+1)} \sqrt{(n+1)}}{5^{(n+1)}}}{\dfrac{3^n \sqrt{n}}{5^n}}$$

$$= \frac{5^n \times 3^{(n+1)} \times \sqrt{(n+1)}}{5^{(n+1)} \times 3^n \times \sqrt{n}}$$

$$= \frac{3}{5}\sqrt{\frac{n+1}{n}} < 1, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Ainsi: $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} < 1$, et donc $U_{n+1} < U_n$.

La suite (U_n) est donc: strictement décroissante sur $\mathbb{N}^*$ (strictement monotone).

2. g. Étudions la monotonie de la suite (U_n), avec $U_n = 2023 \times 1,03^n$ ($n \in \mathbb{N}$):

Cela revient à déterminer le sens de variation de la suite (U_n).

Ici (U_n) est une suite à termes strictement positifs.

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2023 \times 1,03^{(n+1)}}{2023 \times 1,03^n}$$

Freemaths : Tous droits réservés

$= 1,03 > 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi: $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} > 1$, et donc $U_{n+1} > U_n$.

La suite (U_n) est donc: strictement croissante sur $\mathbb{N}$ (strictement monotone).

Freemaths : Tous droits réservés